TERUBAHSUAI BAGI MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK PERINGKAT KEDUA

FARAH `AMIRAH BINTI MAT DERIS

DISERTASI YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN EKONOMI
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

APRIL 2010

PUMS99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: PENYELESAIAN SPLINE TAK POLINOMIAL KUBIK MENERUSI PENDEKATAN PENGEMBURAN BERLEBIHAN BERTURUT-TURUT TERUBAHSUAI BAGI MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK PERINGKAT KEDUA.

IJAZAH: SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN (MATEMATIK DENGAN EKONOMI)

SAYA FARAH 'AMIRAH BINTI MAT DERIS SESI PENGAJIAN: 2006/2010
(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPSM/Sarjana/Doktor Falsafah) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institutsi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

[ ]	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau Kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)
[ ]	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
[/]	TIDAK TERHAD	

Disahkan Oleh

(TANDATANGAN PENULIS) (TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: 378 KPG. PDG. MAKAS, BATU RAKIT, 21030 KUALA TERENGGANU, TERENGGANU.

PROF. MADYA DR. JUMAT SULAIMAN
Nama Penyelia

Tarikh: 03 MEI 2010 Tarikh: 06 MEI 2010

CATATAN:- *Potong yang tidak berkenaan.
**Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa /organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.
@Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

April 2010

FARAH `AMIRAH BINTI MAT DERIS
(HS2006-1961)

PENGESAHAN

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**

   (PROF. MADYA DR. JUMAT SULAIMAN)

2. **PEMERIKSA**

   (DR. AINI JANTENG)

3. **DEKAN**

   (PROF. DR. MOHD HARUN ABDULLAH)

PENGHARGAAN

Syukur ke hadrat Allah S.W.T dengan limpah dan kurnianya dapat saya menyiapkan disertasi ini dengan jayanya. Saya juga ingin mengambil kesempatan ini untuk mengucapkan ribuan terima kasih kepada semua pihak yang membantu dalam kajian ini.

Sekalung penghargaan juga saya tujukan kepada penyelia kajian ini iaitu Prof. Madya Dr Jumat Bin Sulaiman kerana telah banyak memberi tunjuk ajar dalam proses menyiapkan disertasi ini dan juga kepada Cik Khadizah Ghazali serta para pensyarah Program Matematik Dengan Ekonomi dan Matematik Dengan Komputer Grafik yang turut memberi cadangan sepanjang saya menjalankan kajian ini.

Kepada kedua ibu bapa saya, Mat Deris Jusoh dan Zainun Yusof yang banyak mendoakan dan memberikan sokongan serta nasihat kepada saya agar tidak mudah berputus asa dalam menghadapi pelbagai cabaran dalam menjalankan kajian ini. Tidak lupa juga ucapan terima kasih ditujukan kepada Mohd Nur Kauthar, Nur Izzyan Izzati, Siti Zuranida Fadhlina dan rakan-rakan perjuangan yang telah membantu secara tidak langsung dalam menyiapkan disertasi ini.

Jasa baik semua pihak yang telah terlibat dalam menjayakan penulisan disertasi ini amatlah dihargai.

ABSTRAK

Menerusi kajian yang lepas, spline tak polinomial kubik telah menunjukkan salah satu penyelesaian yang cekap dalam menyelesaikan sistem persamaan linear bagi masalah nilai sempadan dua titik peringkat kedua. Justeru itu, dalam disertasi ini, kecekapan kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terubahsuai dengan dua parameter berpemberat ω dan ω' bersama-sama dengan kaedah lelaran Gauss-Seidal dan kaedah lelaran pengenduran berlebihan berturut-turut dikaji dalam menyelesaikan sistem persamaan linear bagi penyelesaian spline tak polinomial kubik. Untuk mencari kaedah yang terbaik, tiga perkara yang dititikberatkan ialah bilangan lelaran yang paling minimum, masa lelaran yang paling pantas dan ralat mutlak maksimum yang paling minimum. Ujikaji berangka ke atas permasalahan juga diberi untuk mengilustrasikan bahawa kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terubahsuai adalah lebih baik berbanding kaedah-kaedah lain yang terlibat dalam kajian ini.

Solving cubic non-polynomial spline to the solution of a system of second-order two point boundary-value problems using Modified Successive Over Relaxation (MSOR).

ABSTRACT

Based on previous studies, cubic non-polynomial spline has been shown to be one of efficient solutions in solving any system of linear equations for second-order two point boundary value problems. According to the studies for this dissertation, the efficiency of Modified Successive Overrelaxation (MSOR) method with two weighted parameter ω and ω' together with Successive Overrelaxation (SOR) method and Gauss-Siedal method are studied in order to solve linear systems of cubic non-polynomial spline solution. In order to get the best method, there are three things that have to consider which are the minimum number of iteration, the fastest time of iteration and the minimum error. Numerical experiments of a problem are also given to illustrate that the Modified Successive Overrelaxation (MSOR) method are more superior compared with other tested methods.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI ISTILAH

Singkatan	Bahasa Melayu
IVP	Masalah Nilai Awalan
VIM	Penyelesaian Pengulangan Semula Variasi
GS	Gauss-Seidal
PBB	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut
PBBT	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terubahsuai
PTB	Persaman Terbitan Biasa
PTS	Persamaan Terbitan Separa
PBB	Persamaan Perbezaan Biasa
EJ	Jacobi Terekstrapolasi
EGS	Gaus-Seidal Terekstrapolasi
ESOR	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terekstrapolasi
EAGS	Gaus-Seidal Terekstrapolasi pecutan

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Penyelesaian kaedah berangka diperkenalkan untuk mengatasi keterbatasan kaedah analitik. Ini adalah kerana penyelesaian bagi masalah yang adakalanya yang sangat mudah tidak dapat diselesaikan secara analitik. Maka, kaedah berangka diperkenalkan. Selain daripada memberikan percubaan penyelesaian berangka kepada masalah yang tidak mempunyai penyelesaian analitik, kaedah ini juga dipilih untuk menyelesaikan masalah yang rumit (Ab. Rahman, 1990).

Kaedah berangka merupakan kaedah alternatif yang memberikan suatu penyelesaian hampiran kepada suatu masalah matematik atau kejuruteraan (Ariffin & Shahrir, 2000). Penyelesaian kaedah berangka yang melibatkan masalah nilai sempadan dua titik linear dan tidak linear mempunyai kepentingan yang meluas merangkumi semua aspek dan aplikasi yang digunakan pada dunia saintifik sekarang (Atay & Coskun, 2008). Sehubungan dengan itu, perbincangan kajian ini dilakukan untuk mengkaji penyelesaian kaedah berangka yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai sempadan dua titik linear menggunakan penyelesaian kaedah spline tak polinomial peringkat kedua.

Menurut Devore & Ron, pada tahun 1964, bapa spline iaitu Iso Schoenberg telah mencipta perkataan spline. Ia juga dinyatakan di dalam kajian Barrodale & Young (1966). Interpolasi spline terbahagi kepada banyak bahagian yang telah dibezakan mengikut darjah dan terbitan yang berbeza bagi setiap jenis spline dan ia juga telah berkali-kali dibincangkan dalam permasalahan masa kini.

Masalah nilai sempadan ialah merupakan sistem di mana persamaan terbitan biasa dengan penyelesaian dan nilai terbitan adalah spesifik lebih dari satu titik dan kebiasaannya, masalah nilai sempadan dua titik adalah penyelesaian dan nilai terbitan pada dua titik yang dipanggil titik sempadan (Gladwell, 2008). Terdapat beberapa kaedah yang terkenal bagi menyelesaikan masalah nilai sempadan seperti kaedah tembakan dan kaedah beza terhingga. Kaedah tembakan pula dapat dilakukan sama ada dengan cara newton atau sekan. Kaedah ini dapat menyelesaikan masalah nilai sempadan berbentuk linear dan tidak linear, tetapi kaedah ini tidak stabil untuk semua masalah. Maka, kaedah yang lebih baik ialah kaedah beza terhingga.

1.2 Pengenalan Kepada Konsep Persamaan Terbitan

Persamaan terbitan wujud dengan masalah yang sangat banyak dan tidak dijangka dalam suatu bidang kejuruteraan serta bidang matematik yang sangat luas dan digunakan dalam bidang matematik gunaan, matematik tulen dan fizik. Ianya memainkan peranan penting dalam pemodelan bagi setiap masalah fizikal, teknikal, ataupun proses biologikal (Ab. Rahman, 1990).

1.2.1 Jenis-Jenis Persamaan Terbitan

Persamaan terbitan merupakan sebarang persamaan yang membabitkan terbitan biasa suatu fungsi yang belum diketahui bentuknya. Contoh-contoh persamaan terbitan ialah persamaan terbitan biasa, persamaan terbitan separa, persamaan terbitan lengah, persamaan terbitan stokastik dan persamaan terbitan algebra (Ab. Rahman, 1990). Pembahagian utama adalah persaman terbitan biasa dan persamaan terbitan separa yang diaplikasikan pada hari ini. Nilai awalan bagi persamaan terbitan biasa dan separa adalah selalu digunapakai dalam bentuk matematik dalam sains dan kejuruteraan.

Persamaan terbitan biasa adalah di mana terdapat hanya satu sahaja pembolehubah tak bersandar terlibat dan terbitan biasa wujud. Sebaliknya, jika terdapat lebih dari satu pembolehubah tak bersandar terlibat dan terbitan separa wujud, maka persamaan terbitan ini dikenali sebagai persamaan terbitan separa.

A. Persamaan Terbitan Biasa

Persamaan terbitan biasa perlu dibentuk apabila persamaan tersebut hanyalah satu hubungan antara pembolehubah yang nyata x, pembolehubah yang bersandar y, dan sekurang-kurangnya satu sebutan $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ bagi fungsi y serta bebas dari terbitan atau pembezaan. Penyelesaian am atau penyelesaian itlak mempunyai bilangan pemalar sebarangan yang sama dengan peringkat persamaan pembezaan. Penyelesaian khusus persamaan terbitan adalah bebas dari pemalar sebarangan. Hubungan persamaan terbitan biasa ini dapat ditulis pada amnya, sebagai

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Persamaan ini dikatakan linear jika F ialah suatu fungsi linear terhadap pembolehubah $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. F bagi persamaan (1.1) juga adalah nilai fungsi nyata dari pembolehubah-pembolehubah $n+2$ iaitu $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Anggapan yang mungkin bagi menyelesaikan masalah persamaan terbitan biasa dalam bentuk persamaan (1.1) ialah untuk terbitan $y^{(n)}$ yang tertinggi dalam istilah dari pembolehubah-pembolehubah $n+1$ adalah seperti berikut:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.1a}$$

dengan f adalah fungsi yang diketahui dari $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Pengelasan persamaan terbitan biasa yang terpenting sekali adalah berdasarkan kepada sifat persamaan tersebut, iaitu sama ada sesuatu persamaan itu linear atau tidak linear. Umumnya, persamaan terbitan biasa peringkat ke-n dikatakan linear jika y dan semua terbitannya (tetapi bukan x) wujud secara linear. Persamaan terbitan biasa ke-n yang am dapat ditulis sebagai

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = Q(x) \tag{1.2}$$

Fungsi-fungsi $a_j(x), 0 \le j \le n$ adalah disebut pekali daripada persamaan. Jika persamaan adalah ditentukan, anggapan yang mungkin adalah $a_0(x) \neq 0$ dalam apa jua bentuk selang. Persamaan (1.2) adalah disebut persamaan homogen jika

$Q(x)=0$. Manakala, jika $Q(x)\neq 0$, maka persamaan (1.2) adalah dikatakan menjadi persamaan bukan homogen dan $Q(x)$ adalah disebut istilah bukan homogen.

B. Persamaan Terbitan Separa

Persamaan terbitan separa merupakan suatu hubungan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui dengan beberapa pembolehubah tidak bersandar dan pembezaan separanya adalah terhadap pembolehubah-pembolehubah tersebut. Persamaan terbitan separa adalah merupakan persamaan yang memnpunyai terbitan yang berdarjah tinggi. Persamaan terbitan separa dapat dinyatakan secara amnya seperti berikut:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0 \tag{1.3}$$

Hubungan bagi persamaan (1.3) tersebut menunjukkan bahawa nilai-nilai $u(x,y)$ adalah tidak bersandar terhadap x. Oleh itu, penyelesaian amnya ialah

$$u(x,y)=f(y)$$

dengan f ialah fungsi terbezakan bagi y. Persamaan terbitan biasa yang sesuai untuk kes ini ialah

$$\frac{du}{dx}=0 \tag{1.4}$$

yang mempunyai penyelesaian

$$u(x)=d \tag{1.5}$$

dengan d ialah nilai pemalar yang tidak bersandar terhadap x. Perbandingan antara penyelesaian am terbitan biasa dan penyelesaian am terbitan separa ialah penyelesaian am bagi persamaan terbitan biasa melibatkan pemalar yang terbezakan, manakala penyelesaian bagi persamaan terbitan separa melibatkan fungsi yang terbezakan dan mempunyai penyelesaian yang tidak unik. Maka,

persamaan terbitan separa mempunyai syarat-syarat sempadan di mana penyelesaian tersebut boleh ditakrifkan.

Berikut merupakan beberapa contoh bagi persamaan perbezaan separa (Zainor Rizduan, 2008)

(i) Persamaan Terbitan Separa Parabolik

Persamaan parabolik memperihalkan pengaliran haba dan proses pembauran dan memenuhi syarat B2 – 4AC = 0.

(ii) Persamaan Terbitan Separa Hiperbolik

Persamaan hiperbolik memperihalkan sistem bergetar dan gerakan gelombang yang memenuhi syarat B2 – 4AC > 0.

(iii) Persamaan Terbitan Separa Eliptik

Persamaan eliptik memperihalkan fenomena keadaan mantap dan memenuhi syarat B2 – 4AC < 0.

1.2.2 Masalah Nilai Sempadan Dua Titik

Masalah sempadan dua titik selalunya ditemui dalam bidang kejuruteraan dan sains dan penyelesaiannya tidaklah begitu mudah. Masalah nilai sempadan dua titik mugkin mempunyai tiada penyelesaian atau satu penyelesaian atau banyak penyelesaian dan ianya terbahagi kepada linear dan tidak linear. Contoh bagi masalah sempadan dua titik yang linear adalah seperti:

$$y'' + f(x)y + g(x)y = r(x) \tag{1.5}$$

dengan syarat sempadan

$$y(x_0) = a, \qquad y(x_n) = b$$

Sementara itu, $y(x_0)$ adalah sempadan titik awal iaitu diwakili oleh a dan $y(x_n)$ adalah sempadan titik akhir diwakili oleh b dalam suatu selang bagi masalah sempadan dua titik (Albasiny & Hoskin, 1969).

1.3 Pemerihalan Konsep Matematik Asas

Konsep matematik asas diperlukan untuk menyelesaikan sistem persamaan pembezaan peringkat kedua dalam kajian ini. Contoh-contoh konsep matematik asas yang diperkenalkan adalah seperti persamaan terbitan, matriks algebra, sistem persamaan linear dan kembangan siri Taylor.

Pendiskretan kembangan siri Taylor mempunyai dua fasa. Fasa pertama melibatkan pendiskretan sistem persamaan pembezaan peringkat kedua yang tak linear, manakala fasa kedua pula, melibatkan kaedah Newton bagi menurunkan pendiskretan fasa pertama kepada sistem persamaan linear. Apabila fasa kedua selesai, maka beberapa konsep asas matriks diperlukan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear yang diperoleh dalam bentuk matriks.

1.4 Konsep Asas Matriks Algebra

Matriks merupakan satu tatasusun segiempat tepat nombor-nombor dalam bentuk lajur dan baris yang dipagari oleh tanda kurungan atau parentesis. Matriks dapat digunakan untuk merungkapkan sistem persamaan linear. Sehubungan dengan itu, matriks boleh melakukan operasi penambahan, penolakan, dan pendaraban seperti persamaan matematik biasa. Matriks algebra mempunyai nombor-nombor nyata atau nombor-nombor kompleks. Matriks nyata adalah nyata apabila nombor-nombor yang disusun adalah nombor nyata. Manakala, jika susunan nombor melibatkan nombor kompleks, maka ia dipanggil matriks kompleks. Justeru itu, pelbagai masalah teknikal dapat diselesaikan dengan mudah menerusi penggunaan matriks.

Suatu matriks dengan baris m dan lajur n yang disusun dipanggil matriks $m \times n$ di mana m dan n dikatakan dimensi bagi matriks tersebut. Dimensi matriks tersebut dinyatakan di dalam baris dahulu dan diusuli dengan bilangan lajur. Tertib atau saiz sesuatu matriks dinyatakan sebagai $m \times n$. Apabila baris m dan lajur n adalah sama bilangannya, maka, matriks ini dikenali sebagai matriks segiempat sama dan dapat ditakrifkan sebagai $n \times n$ atau matriks tertib n. Perhatikan suatu matriks $A_{m \times n}$ yang dinyatakan sebagai:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

1.4.1 Matriks Baris Dan Lajur

Matriks baris merupakan matriks yang mempunyai satu baris sahaja pada peringkat $1 \times n$, manakala matriks lajur pula merupakan matriks yang mempunyai satu lajur sahaja pada peringkat $m \times 1$. Matriks lajur dan matriks baris masing-masing dikenali sebagai vektor baris dan vektor lajur dengan menggunakan matriks dalam mentakrifkan vektor. Maka, unsur-unsur (i, j) dikatakan komponen vektor bagi vektor baris dan vektor lajur. Vektor baris, $\vec{r}$ dan vektor lajur, $\vec{s}$ dinyatakan masing-masing sebagai:

$$\vec{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n]$$

dan

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

1.4.2 Matriks Segiempat Sama

Matriks segiempat sama A boleh dibahagikan kepada tiga bahagian iaitu, bahagian segitiga atas, bahagian pepenjuru, dan bahagian segitiga bawah. Jika $A = [a_{ij}]$, maka,

$$a_{ij} \text{ adalah berada didalam } \begin{cases} \text{bahagian segitiga atas jika} & i < j \\ \text{bahagian pepenjuru atas jika} & i = j \\ \text{bahagian segitiga bawah jika} & i > j \end{cases}$$

1.4.3 Matriks Pepenjuru

Suatu $n \times n$ matriks $D = [d_{ij}]$ adalah dipanggil matriks pepenjuru jika $d_{ij} = 0$ bagi $i \neq j$. ini bermaksud bahawa unsur-unsur yang tidak bernilai sifar hanya berada di pepenjuru matriks segiempat sama. Dengan kata lain, pemasukan yang tidak terletak pada pepenjurunya adalah merupakan unsur-unsur sifar. Bentuk matriks pepenjuru D adalah seperti:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

atau boleh ditulis juga sebagai

$$D = \text{pepenjuru } (d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}).$$

1.4.4 Matriks tiga pepenjuru

Matriks tiga pepenjuru ialah matriks dengan unsurnya mempunyai tiga pepenjuru yang bukan sifar dan selainnya ialah sifar. Ini bermaksud bahawa unsur-unsur yang tidak bernilai sifar hanya berada di tiga pepenjuru matriks segiempat sama. Dengan kata lain, pemasukan yang tidak terletak pada pepenjurunya adalah merupakan unsur-unsur sifar. Matrik tiga pepenjuru dapat dinyatakan sebagai:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

1.4.5 Matriks Segitiga atas

Suatu $n \times n$ matriks $A = [a_{ij}]$ adalah dipanggil matriks segitiga atas jika $a_{ij} = 0$ untuk $i = j$ dan $i > j$. Matriks ini boleh ditakrifkan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.6 Matriks Segitiga Bawah

Suatu $n \times n$ matriks $A = [a_{ij}]$ adalah dipanggil matriks segitiga bawah dengan matriks yang unsur- unsur adalah sifar, $a_{ij} = 0$ untuk $i = j$ dan $i < j$ .Matriks segitiga bawah B boleh ditakrifkan sebagai:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} & a_{31} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4.7 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian mempunyai komponen-komponen yang diterbitkan pada peringkat pertama bagi setiap fungsi terhadap setiap pembolehubah yang terkandung di dalam fungsi berkenaan. Secara umumnya, matriks Jacobian adalah berbentuk:

$$J(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix},$$

dengan

$$x=[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m]^T.$$

1.4.8 Matriks Identiti

Suatu matriks pepenjuru dengan $d_{ii}=1$ bagi semua i dikenali sebagai matriks identiti I. Matriks identiti merupakan matriks segiempat sama yang unsur-unsur pepenjurunya bernilai satu dan unsur-unsur lain adalah bernilai sifar. Matriks identiti ditandakan oleh I dan dapat diringkaskan sebagai $I_n=\lfloor e_{ij}\rfloor$ dengan peringkat matriks identiti adalah n. Matriks identiti I ditakrifkan sebagai:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

1.4.9 Matriks Transposisi

Katakan $A=(a_{ij})$ suatu matriks $m\times n$. Matriks baru bagi transposisi matriks A peringkat $m\times n$ ialah suatu matriks peringkat $n\times m$ yang ditandakan sebagai matriks A^T yang dibentuk dengan saling menukar komponen-komponen baris kepada lajur dan sebaliknya. Pertimbangkan matriks A sebagai:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{m\times n},$$

dan matriks transposisinya ditakrifkan sebagai:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

1.4.10 Matriks Simetri

Suatu matriks segi empat sama $A=(a_{ij})$ itu disebut simetri jika,

$$A^T=A$$

dengan A^T merupakan matriks transposisi bagi A. Ini bermaksud pemasukan (i,j) daripada A^T ialah a_{ij} dan pemasukan (i,j) daripada A ialah a_{ji}. Maka, dengan menggunakan kesamaan matriks,

$$a_{ij}=a_{ji}$$

dimana, kawasan bawah segitiga adalah pantulan simetri daripada kawasan atas segitiga oleh kawasan pepenjuru . Juga bermakna bahawa A adalah suatu matriks segi empat sama dan setiap pasangan pemasukan yang bersimetri terhadap pepenjuru A adalah sama.

1.5 Kepelbagaian Interpolasi Polinomial

Terdapat dua jenis interpolasi yang selalu digunakan iaitu interpolasi polinomial dan interpolasi tak polinomial. Interpolasi polinomial ialah masalah untuk membentuk satu fungsi yang dipunyai oleh satu ruang dimensi linear yang mudah dan terbatas daripada satu set data yang diberi (Gasca & Sauer, 2000). Misalnya interpolasi polinomial yang sering digunakan adalah interpolasi Newton, interpolasi Stirling dan interpolasi Lagrange.

Interpolasi Newton terbahagi kepada dua iaitu interpolasi Newton beza depan dan interpolasi Newton beza belakang. Kedua-dua interpolasi Newton ini sangat sesuai dengan pengolahan data pada bahagian awal dan bahagian akhir sesuatu jadual. Berikut merupakan persamaan polinomial interpolasi Newton beza depan dan persamaan polinomial interpolasi Newton beza belakang.

Persamaan polinomial interpolasi Newton beza depan adalah

$$P_n(x) = y_k + \frac{r\Delta y_k}{1!} + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 y_k + \ldots + \frac{r(r-n+1)\ldots.(r-1)}{n!}\Delta^n y_k, \qquad (1.6)$$

dengan $r = \frac{(x-x_k)}{h}$

Manakala persamaan polinomial interpolasi Newton beza belakang adalah

$$P_n(x) = y_k + \frac{r\nabla y_k}{1!} + \frac{r(r-1)}{2!}\nabla^2 y_k + \cdots + \frac{r(r-n+1)\ldots(r-1)}{n!}\nabla^n y_k$$

dengan $r = \frac{(x-x_k)}{h}$. (1.7)

Manakala interpolasi Stirling pula dapat digunakan bagi pengolahan data di bahagian tengah jadual. Kaedah interpolasi Lagrange sebenarnya sama dengan kaedah interpolasi Newton dan cuma bentuknya berlainan. Interpolasi Lagrange dikenali dengan tanda *Li(x)* iaitu pendarab Lagrange dan polinomial interpolasinya bergantung kepada bilangan titik yang diambil iaitu

$$P_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \cdots + L_n(x)y_i \qquad (1.8)$$

dengan $L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots.(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$.

Ia boleh mengelakkan pengiraan beza terhingga kerana proses ini melibatkan pengiraan secara berperingkat yang boleh menyebabkan kecuaian pengiraan tanpa disedari.

RUJUKAN

Ab. Rahman, A. 1990. *Pengiraan Berangka.* Dewan Bahasa dan Pustaka, Selangor.

Ahmad Kamal Ariffin M.I & Shahrir A. 2000. *Kaedah Berangka Kejuruteraan.* Universiti Kebangsaan Malaysia, Bangi, ms.13-116.

Albasiny, E.L. & Hoskin , W.D. 1969. Cubic Spline Solution To Two Point Boundary Value Problems. *The Computer Journal* **12**(2): 151-153.

Aliuddin, J. 2009. Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Bagi Menyelesaikan Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Tak Linear. Disertasi Sarjana Muda Sains, Universiti Malaysia Sabah, Kota Kinabalu (Tidak diterbitkan).

Atay, M.T. & Coskun, S.B. 2008. Effects Of Nonlinearity On The Variational Iteration Of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems With Comparison With Respect To Finite Element Analysis. *Mathematical Problems In Engineering* **10**.

Barrodale, I. & Young, A. 1966. A Note On Numerical Procedures For Approximation By Spline Functions. *The Computer Journal* **9**(3): 318-320.

Bickley, W. G. 1968. Piecewise Cubic Interpolation And Two-Point Boundary Problems. *The Computer Journal* **11**(2): 206-208.

Chen, Y. 2006. Dynamic Systems Optimization. Dissertation of Ph.D., University of California, Los Angeles.

Chen, Y. & Manousiouthakis, V. 2005. Identification of All Solutions of Tpbv Problems. *Aiche Annual Meeting, Cincinnati* **11**.

DeVore, R. & Ron, A. 2005. Developing a Computation-Friendly Mathematical Foundation for Spline Functions. SIAM News, May, Vol. 38(4).

El-Gamel, M. 2007. A comparison between the Sinc–Galerkin and the modified decomposition methods for solving two-point boundary-value problems. *Journal of Computational Physics* **223**: 369–383.

El-Gamel, M. 2007. Sinc and The Numerical Solution of Fifth-order Boundary Value Problems. *Applied Mathematics and Computation* **187**: 1417–1433.

Fyfe, D. J. 1968. The Use Of Cubic Splines In The Solution Of Two-Point Boundary Value Problems. *The Computer Journal* **12**: 188-192.

Fyfe, D. J. 1969. The Use Of Cubic Splines In The Solution Of Certain Fourth Order Boundary Value Problems. *The Computer Journal* **13**: 204.

Gasca, M. & Sauer, T. 1999. On the history of multivariate polynomial interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **122**: 23-35.

Gasca, M. & Sauer, T. 2000. Polynomial interpolation in several variables. *Advances in Computational Mathematics* **12**: 377–410.

Gladwell, I. 2008. Boundary Value Problem. *Scholarpedia* **3**(1): 2853.

Hadjidimos, A. & Saridakis, Y. G. 1990. Modified Successive Overrelaxation (MSOR) and Equivalent 2-Step Interative Methods for Collocation Matrices. *Computer Sciences Department Purdue University*, West Lafayette.

Hajji, M. A. & Al-Khaled, K. 2007. Two reliable methods for solving nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation* **186**: 1151–1162.

Hemker, P. W. & Spekreijse, S. P. 1986. Multiple Grid And Osher's Scheme For The Efficient Solution Of The Steady Euler Equations. *Applied Numerical Mathematics* **2**: 475–493.

Islam, S.U. & Tirmizi, I.A. 2006. Nonpolynomial Spline Approach To The Solution Of A System Of Second-Order Boundary-Value Problems. *Applied Mathematics And Computation* **173**: 1208–1218.

Islam, S.U., Tirmizi, I.A., Noor, M.A. & Khan, M.A. 2006. Quadratic Non-Polynomial Spline Approach To The Solution Of A System Of Second-Order Boundary-Value Problems. *Applied Mathematics And Computation* **179**: 153-160

Islam, S.U., Tirmizi, I.A. & Khan, M.A. 2007. Quartic Non-Polynomial Spline Approach To The Solution Of A System Of Third-Order Boundary-Value Problems. *Applied Mathematics And Computation* **335**: 1095-1104

Kumar, M. & Srivastava, P.K. 2007. Computational Techniques For Solving Differential Equations By Quadratic, Quartic And Octic Spline. *Advances In Engineering Software* **39**: 646–653

Lahtinen, A.1994. On the choice of the initial value of a quadratic spline in positive interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **69**: 13-25.

Lee, J.Y. & Greengard, L. 1997. A Fast Adaptive Numerical Method For Stiff Two-Point Boundary Value Problems. *Siam Journal Science Computation* **18**(2): 403-429.

Mahanum, D. J., Mohamed, S., Zanariah, A. M. & Zarina, B. I. 2009 . Solving Directly Two Point Boundary Value Problems Using Direct Multistep Method. *Malaysiana* **38**(5): 723–728

Meade, D.B., Haran, B.S., White, R.E. 1996. The Shooting Technique For The Solution Of Two-Point Boundary Value Problem, *Mapletech* **3**(1): 85-93

Mohsena, A. & Gamel, M.E. 2008 .On The Galerkin And Collocation Methods For Two-Point Boundary Value Problems Using Sinc Bases. *Computers And Mathematics With Applications* **56**: 930–941

Price, C. F. 1968. An Offset Vector Iteration Method For Solving Two-Point Boundary-Value Problems. *The Computer Journal* **11**(2): 220-228.

Ramadan, M.A., Lashien, I.F. & Zahra, W.K. 2007. Polynomial And Nonpolynomial Spline Approaches To The Numerical Solution Of Second Order Boundary Value Problems. *Applied Mathematics And Computation* **184**: 476-484.

Ramadan, M.A., Lashien, I.F. & Zahra, W.K. 2009. Quintic Nonpolynomial Spline Solutions For Fourth Order Two-Point Boundary Value Problems. *Applied Mathematics And Computation* **14**: 1105-1114.

Ramadan, M.A., Lashien, I.F. & Zahra, W.K. 2008. High Order Accuracy Nonpolynomial Spline Solutions For 2μth Order Two Point Boundary Value Problems. *Applied Mathematics And Computation* **204**: 920-927.

Sablonniere, P. 1982. Interpolation by Quadratic Splines onTriangles and Squares. *North-Holland Publishing Company Computers in Industry* **3**: 45-52.

Saiman, M. B., Mohammad, S. & Fudziah, I. 1994. Kestabilan Kaedah Multilangkah Dalam Pelaksanaan Secara Praktikal Menggunakan Lelaran Newton. *Matematika* **10(2)**: 61-67.

Schoenberg, I. J. & Whitney, A. 1953. The Positivity Of Translation Determinants With An Application To The Interpolation Problem By Spline Curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74**: 246–259.

Siddiqi, S. S. & Akram, G. 2007. Numerical Solution Of A System Of Fourth Order Boundary Value Problems Using Cubic Non-polynomial Spline Method. *Applied Mathematics and Computation.* **190**: 652-661.

Siddiqi, S. S. & Akram, G. 2008. Quintic Spline Solutions Of Fourth Order Boundary-Value Problems. *International Journal Of Numerical Analysis And Modeling Computing and Information* **5**(1): 101-111.

Siddiqi, S. S. & Akram, G. 2006a. Solution Of Fifth Order Boundary Value Problems Using Nonpolynomial Spline Technique. *Applied Mathematics And Computation* **175**: 1574–1581.

Siddiqi, S. S. & Akram, G. 2006b. Solution Of Sixth Order Boundary Value Problems Using Nonpolynomial Spline Technique. *Applied Mathematics And Computation* **181**: 708-720.

Sugihara, M. 2002. Double Exponential Transformation In The Sinc-Collocation Method For Two-Point Boundary Value Problems. *Journal Of Computational And Applied Mathematics* **149**: 239–250.

Toraichi, K. & Kamada, M. 1995. Knot Positions for the Smoothest Periodic Quadratic Spline Interpolation of Equispaced Data. *Linear Algebra And Its Applications* **221**: 1245-251.

Wu, X., Kong, K. & Li, C. 2005. Sinc Collocation Method With Boundary Treatment For Two-Point Boundary Value Problems. *Journal Of Computational And Applied Mathematics* **196**: 229 – 240.

Xu, J.C. & Shann, W.C. 1992. Galerkin-Wavelet Methods For Two-Point Boundary Value Problems. *Numerische Mathematik* **63**: 123-144.

Zainor Ridzuan, Y. 2008. Rekabentuk Permukaan Bentuk Bebas Menggunakan Persamaan Pembezaan Separa (PPS). Disertasi Sarjana Sains, Universiti Sains Malaysia, Pulau Pinang.