KELAS FUNGSI MEROMORFI DAN CEMBUNG TERHADAP TITIK SIMETRI KONJUGAT

NORFARHANA BINTI HASSAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN
KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

2009

KELAS FUNGSI MEROMORFI DAN CEMBUNG TERHADAP TITIK SIMETRI KONJUGAT

NORFARHANA BINTI HASSAN

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

APRIL 2009

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

20 APRIL 2009

NORFARHANA BINTI HASSAN
HS2005-3028

PENGESAHAN

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. PENYELIA

(DR. AINI JANTENG) __________________

2. PEMERIKSA 1

(PROF. MADYA DR. HO CHONG MUN) __________________

3. DEKAN

(PROF. DR. MOHD HARUN ABDULLAH) __________________

PENGHARGAAN

Terlebih dahulu, saya merasa amat bersyukur ke hadrat Ilahi kerana dengan limpah dan kurnia-Nya, dapat saya menyiapkan projek ini dengan lancar.

Seterusnya, saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih dan penghargaan kepada penyelia saya, Dr. Aini Janteng di atas ilmu, pengalaman dan dorongan beliau yang banyak membantu saya untuk menjayakan projek ini.

Selain itu, saya juga ingin berterima kasih kepada rakan-rakan seperjuangan yang turut membantu dan berkongsi pengetahuan tentang projek ini.

Di samping itu, tidak dilupai juga ibu dan ayah saya yang banyak memberi sokongan dan bantuan dari segi kewangan. Ucapan penghargaan dan terima kasih saya rakamkan kepada mereka.

NORFARHANA BINTI HASSAN
HS2005-3028

ABSTRAK

Kajian ini menekankan kepada kelas A yang terdiri daripada fungsi f yang analisis dalam cakera unit terbuka $D = \{z : |z| < 1\}$. Subkelas bagi A mengandungi fungsi univalen dan ternormal dengan keadaan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ yang dilambangkan sebagai S. Jika $f \in S$, maka f mempunyai kembangan siri Maclaurin berbentuk $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ dengan a_n adalah nombor kompleks. Katakan Γ kelas yang terdiri daripada fungsi f berbentuk $f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dengan a_n adalah nombor nyata bukan negatif. Dalam kajian ini, subkelas baru bagi kelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat akan diperkenalkan dengan mempertimbangkan fungsi $f \in \Gamma$. Anggaran pekali bagi kelas baru tersebut akan ditentukan. Di samping itu, hasil pertumbuhan dan titik ekstrim juga akan ditentukan bagi kelas baru tersebut.

ABSTRACT

This research focuses to the class A consisting of functions f which are analytic in the open unit disc $D=\{z:|z|<1\}$. The subclass of A consisting of univalent functions and normalized by the conditions $f(0)=f'(0)-1=0$ denoted by S. If $f\in S$, then f has a Maclaurin series expansion of the form $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ where a_n is a complex number. Let Γ denotes the class consisting of functions f of the form $f(z)=\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ where a_n is a non negative real numbers. In this study, new subclasses of functions convex with respect to symmetric conjugate points will be introduced by considering the functions $f\in\Gamma$. Coefficient estimates for the new classes will be determined. Besides that, the growth results and extreme points also will be determined for the new classes.

KANDUNGAN

Muka Surat

SENARAI RAJAH

BAB 2

ULASAN LITERATUR

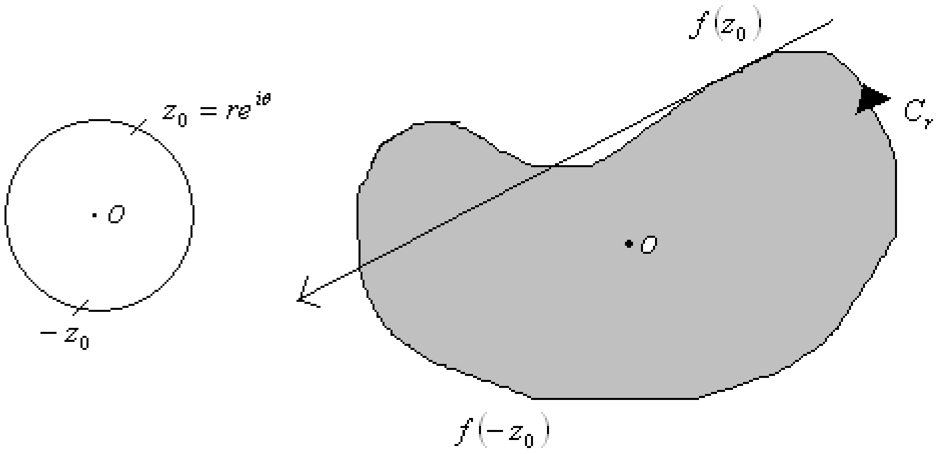
2.1 Pengenalan

Di dalam bab ini, kelas fungsi bakbintang dan cembung terhadap titik simetri, konjugat dan simetri konjugat akan dibincangkan. Secara ringkasnya, kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri telah diperkenalkan oleh Sakaguchi (1959). Kemudian, El-Ashwah dan Thomas (1987) telah memperkenalkan dua kelas fungsi iaitu kelas fungsi bakbintang terhadap titik konjugat dan kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri konjugat. Pada tahun 1977, Das dan Singh telah memperkenalkan kelas fungsi cembung terhadap titik simetri. Seterusnya, di dalam Wong dan Janteng (2008), definisi kelas fungsi cembung tehadap titik konjugat dan kelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat diberikan.

2.2 Fungsi Bakbintang terhadap Titik Simetri, Konjugat dan Simetri Konjugat

Seperti yang diketahui, Sakaguchi (1959) telah memperkenalkan kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri yang dilambangkan sebagai S_S^*. Menurut Sakaguchi (1959), suatu fungsi $f \in A$ adalah bakbintang terhadap titik simetri di dalam D jika untuk setiap r yang menghampiri 1, iaitu $r<1$ dan untuk setiap titik z_0 pada bulatan $|z|=r$, halaju sudut bagi titik f terhadap titik $f(-z_0)$ adalah positif pada titik $z=z_0$ apabila z melalui bulatan $|z|=r$ pada arah positif.

Pernyataan di atas dapat digambarkan seperti dalam Rajah 2.1.



Rajah 2.1 Domain bakbintang terhadap titik simetri

(Sumber daripada Sakaguchi, 1959)

Berikut adalah perwakilan beranalisis bagi S_S^*.

Definisi 2.2.1 (Sakaguchi, 1959) Suatu fungsi $f \in S_S^*$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right\}>0, \qquad z\in D. \tag{2.1}$$

Pada tahun 1987, El-Ashwah dan Thomas telah memperkenalkan dua kelas fungsi iaitu kelas fungsi bakbintang terhadap titik konjugat yang dilambangkan sebagai S_C^* dan kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri konjugat yang dilambangkan sebagai S_{SC}^*.

Berikut adalah perwakilan beranalisis untuk kedua-dua kelas tersebut.

Definisi 2.2.2 Suatu fungsi $f \in S_C^*$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)+\overline{f(\bar{z})}}\right\} > 0, \qquad z \in D. \tag{2.2}$$

Definisi 2.2.3 Suatu fungsi $f \in S_{SC}^*$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)-\overline{f(-\bar{z})}}\right\} > 0, \qquad z \in D. \tag{2.3}$$

Selepas ketiga-tiga kelas ini diperkenalkan, terdapat pengkaji-pengkaji lain seperti Sudharsan *et al.* (1998) dan Halim *et al.* (2005) telah memperkembangkan idea kelas-kelas tersebut dengan memperkenalkan kelas-kelas baru. Kelas-kelas baru yang diperkenalkan oleh pengkaji-pengkaji tersebut akan dibincangkan dalam bahagian seterusnya.

2.3 Kelas $S_S^*T(\alpha,\beta)$, $S_C^*T(\alpha,\beta)$, dan $S_{SC}^*T(\alpha,\beta)$

Pada tahun 1998, Sudharsan *et al.* telah memperkembangkan idea Sakaguchi (1959) dengan memperkenalkan kelas $S_S^*(\alpha,\beta)$. Berikut ialah definisi untuk kelas tersebut.

Definisi 2.3.1 Suatu fungsi $f \in S_S^*(\alpha,\beta)$ jika dan hanya jika

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)}-1\right| < \beta\left|\frac{\alpha zf'(z)}{f(z)-f(-z)}+1\right|, \qquad z \in D. \tag{2.4}$$

dengan $0 \le \alpha \le 1$ dan $0 < \beta < 1$.

Seterusnya, Halim *et al.* (2005) telah memperkenalkan kelas $S_S^*T(\alpha,\beta)$, $S_C^*T(\alpha,\beta)$ dan $S_{SC}^*T(\alpha,\beta)$ dengan menggabungkan idea asal Sakaguchi (1959) dan Sudharsan *et al.* (1998) serta mempertimbangkan fungsi $f \in T$. Nilai α dan β bagi kelas-kelas yang diperkenalkan oleh Halim *et al.* (2005) perlu memenuhi syarat-syarat tertentu, iaitu $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ dan $0 \le \dfrac{2(1-\beta)}{1+\alpha\beta} < 1$.

Berikut adalah definisi bagi kelas $S_S^*T(\alpha,\beta)$, $S_C^*T(\alpha,\beta)$ dan $S_{SC}^*T(\alpha,\beta)$.

Definisi 2.3.2 Suatu fungsi $f \in S_S^* T(\alpha, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} - 1 \right| < \beta \left| \frac{\alpha z f'(z)}{f(z) - f(-z)} + 1 \right|, \qquad z \in D. \tag{2.5}$$

Definisi 2.3.3 Suatu fungsi $f \in S_C^* T(\alpha, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z) + \overline{f(\bar{z})}} - 1 \right| < \beta \left| \frac{\alpha z f'(z)}{f(z) + \overline{f(\bar{z})}} + 1 \right|, \qquad z \in D. \tag{2.6}$$

Definisi 2.3.4 Suatu fungsi $f \in S_{SC}^* T(\alpha, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z) - \overline{f(-\bar{z})}} - 1 \right| < \beta \left| \frac{\alpha z f'(z)}{f(z) - \overline{f(-\bar{z})}} + 1 \right|, \qquad z \in D. \tag{2.7}$$

Syarat-syarat yang telah ditetapkan untuk α dan β adalah diperlukan dan sangat penting untuk memastikan kelas $S_S^* T(\alpha, \beta)$, $S_C^* T(\alpha, \beta)$ dan $S_{SC}^* T(\alpha, \beta)$ membentuk subkelas bagi S.

2.4 Fungsi Cembung terhadap Titik Simetri, Konjugat dan Simetri Konjugat

Seperti yang diketahui, Das dan Singh (1977) telah memperkenalkan kelas fungsi cembung terhadap titik simetri yang dilambangkan sebagai C_S. Definisi bagi kelas tersebut adalah seperti berikut.

Definisi 2.4.1 Suatu fungsi $f \in C_S$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{(zf'(z))'}{(f(z)-f(-z))'}\right\}>0, \qquad z \in D. \tag{2.8}$$

Seterusnya, dengan merujuk kepada Wong dan Janteng (2008), kelas C_S telah dikembangkan kepada kelas fungsi cembung terhadap titik konjugat dan kelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat yang masing-masingnya dilambangkan sebagai C_C dan C_{SC}. Berikut adalah definisi bagi kelas C_C dan C_{SC} dengan merujuk kepada Wong dan Janteng (2008).

Definisi 2.4.2 Suatu fungsi $f \in C_C$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{(zf'(z))'}{\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'}\right\}>0, \qquad z \in D. \tag{2.9}$$

Definisi 2.4.3 Suatu fungsi $f \in C_{SC}$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{(zf'(z))'}{\left(f(z)-\overline{f(-\bar{z})}\right)'}\right\}>0, \qquad z \in D. \tag{2.10}$$

Seperti fungsi bakbintang juga, selepas ketiga-tiga kelas fungsi cembung ini diperkenalkan, maka dengan memperkembangkan idea Halim *et al.* (2005), wujudnya kelas-kelas baru yang akan dibincangkan pada bahagian seterusnya.

2.5 Kelas $C_S T(\alpha,\beta)$, $C_C T(\alpha,\beta)$ dan $C_{SC} T(\alpha,\beta)$

Wong dan Janteng (2008) telah memperkenalkan kelas $C_S T(\alpha,\beta)$, $C_C T(\alpha,\beta)$ dan $C_{SC} T(\alpha,\beta)$ dengan memperkembangkan idea Halim *et al.* (2005) di mana α dan β memenuhi syarat $0 \le \alpha < 1$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$ dan $0 \le \frac{2(1-\beta)}{1+\alpha\beta} < 1$.

Berikut adalah definisi bagi kelas-kelas tersebut.

Definisi 2.5.1 Suatu fungsi $f \in C_S T(\alpha,\beta)$ jika dan hanya jika

$$\left|\frac{(zf'(z))'}{(f(z)-f(-z))'}-1\right| < \beta\left|\frac{\alpha(zf'(z))'}{(f(z)-f(-z))'}+1\right|, \qquad z \in D. \tag{2.11}$$

Definisi 2.5.2 Suatu fungsi $f \in C_C T(\alpha,\beta)$ jika dan hanya jika

$$\left|\frac{(zf'(z))'}{\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'}-1\right| < \beta\left|\frac{\alpha(zf'(z))'}{\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'}+1\right|, \qquad z \in D. \tag{2.12}$$

Definisi 2.5.3 Suatu fungsi $f \in C_{SC}T(\alpha,\beta)$ jika dan hanya jika

$$\left|\frac{(zf'(z))'}{\left(f(z)-\overline{f(-\bar{z})}\right)'}-1\right|<\beta\left|\frac{\alpha(zf'(z))'}{\left(f(z)-\overline{f(-\bar{z})}\right)'}+1\right|, \qquad z \in D. \qquad (2.13)$$

Nilai selang untuk α dan β perlu memenuhi syarat yang ditetapkan supaya kelas $C_S T(\alpha,\beta)$, $C_C T(\alpha,\beta)$ dan $C_{SC}T(\alpha,\beta)$ membentuk subkelas bagi S.

2.6 Kelas $S^*\Lambda(\alpha)$

Pada tahun 2003, Owa dan Pascu telah memperkenalkan kelas $S^*\Lambda(\alpha)$ dan berjaya memperolehi anggaran pekali serta kebakbintangan dan kecembungan bagi kelas tersebut dengan mempertimbangkan kelas yang terdiri daripada fungsi berbentuk

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad (2.14)$$

dengan a_n adalah nombor nyata bukan negatif.

Kelas fungsi tersebut dilambangkan sebagai Λ.

Berikut adalah definisi bagi kelas Λ dengan $0 \le \alpha < 1$ dan $\alpha < k \le 1$.

Definisi 2.6.1 Suatu fungsi $f \in S^{*}\Lambda(\alpha)$ jika dan hanya jika

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}+k\right| \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}+(2\alpha-k)\right| \qquad z \in D. \tag{2.15}$$

SENARAI SIMBOL

$\leq$	lebih kecil daripada atau sama dengan
$\geq$	lebih besar daripada atau sama dengan
$<$	lebih kecil daripada
$>$	lebih besar daripada
$\in$	unsur kepada
$\rightarrow$	menghampiri kepada
$\sum$	hasil tambah

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Suatu fungsi f dikatakan univalen di dalam suatu cakera unit terbuka $D = \{z : |z| < 1\}$ jika ia merupakan pemetaan satu ke satu kepada imejnya, $f(D)$. Menurut Goodman (1975), secara geometrinya dapat dikatakan bahawa imej domain ialah suatu set titik di dalam satah kompleks. Dengan kata lain, satu fungsi f dikatakan univalen di dalam D jika $f(z_1) = f(z_2)$ mengimplikasikan $z_1 = z_2$, $z_1, z_2 \in D$.

Fungsi univalen dikenali sebagai *schlicht* dalam bahasa Jerman yang membawa maksud mudah dan bagi orang Rusia pula, mereka merujuk fungsi univalen ini sebagai *odnolistni* yang membawa maksud lapisan tunggal (Goodman, 1975).

Kajian ini tertumpu kepada kelas fungsi f yang univalen dan ternormal dengan keadaan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ yang dilambangkan sebagai S di dalam D. Menurut Ressang (1995), fungsi f dikatakan analisis pada suatu titik z_0 jika f tertakrif dan terbitannya wujud pada setiap titik di dalam beberapa jiranan daripada

z_0. Jika f analisis di dalam suatu domain E, maka terbitannya wujud pada setiap titik daripada E.

Fungsi-fungsi f yang terdapat di dalam S, mempunyai kembangan siri Maclaurin iaitu

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

dengan a_n adalah nombor kompleks.

Kemudian, subkelas bagi S yang dilambangkan sebagai T mempunyai fungsi f berbentuk

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.2}$$

dengan a_n adalah nombor nyata tidak negatif. Kelas T ini telah diperkenalkan oleh Silverman pada tahun 1975.

1.2 Subkelas bagi S

Subkelas-subkelas utama bagi S ialah kelas fungsi bakbintang yang dilambangkan sebagai S^*, kelas fungsi cembung yang dilambangkan sebagai C dan kelas fungsi hampir cembung yang dilambangkan sebagai K. Di dalam kajian ini, hanya S^* dan C sahaja yang ditekankan.

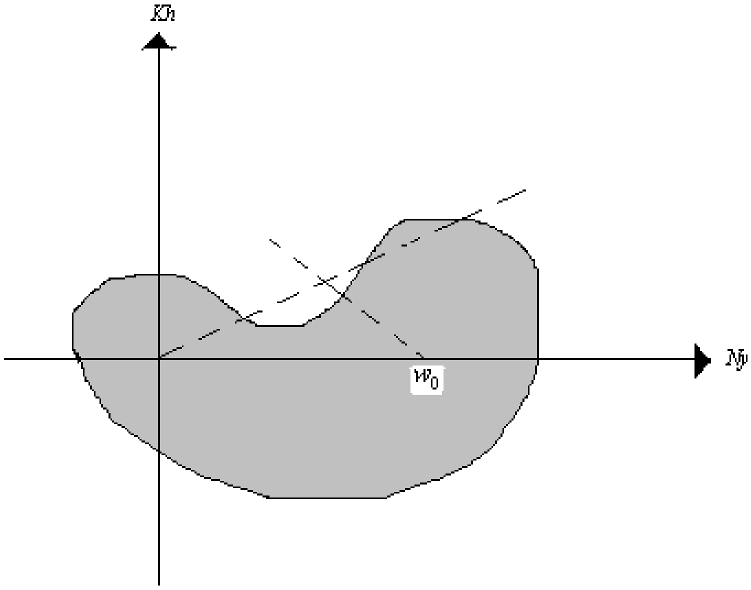
1.3 Perwakilan Geometri

Di dalam bahagian ini, perwakilan geometri untuk dua subkelas S iaitu kelas fungsi bakbintang dan kelas fungsi cembung sahaja yang akan dinyatakan kerana kajian ini lebih tertumpu kepada dua kelas tersebut.

1.3.1 Fungsi Bakbintang

Definisi 1.3.1.1 (Goodman, 1975) Suatu set E pada satah kompleks dikatakan bakbintang terhadap w_0, iaitu suatu titik pedalaman bagi E, jika setiap tembereng garis dengan titik awalan w_0 menyilang pedalaman E di dalam suatu set iaitu tembereng garis juga. Jika fungsi f memetakan D ke seluruh domain yang bakbintang terhadap w_0, maka f ialah bakbintang terhadap w_0. Dalam kes $w_0 = 0$, f ialah fungsi bakbintang.

Rajah 1.1 menunjukkan perwakilan geometri bagi domain bakbintang.



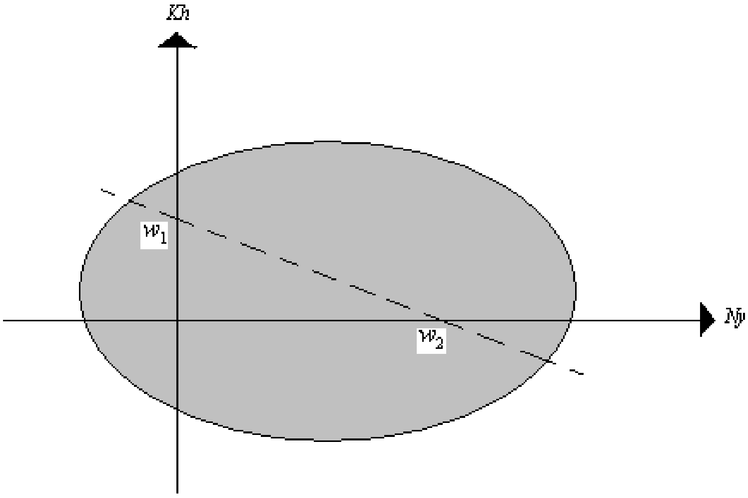
Rajah 1.1 Domain bakbintang

(Sumber daripada Goodman, 1975)

1.3.2 Fungsi Cembung

Definisi 1.3.2.1 (Goodman, 1975) Suatu set E pada satah kompleks dipanggil cembung jika untuk setiap pasangan titik w_1 dan w_2 di pedalaman E, tembereng garis yang menghubungkan w_1 dan w_2 juga berada di dalam pedalaman E. Jika fungsi f memetakan D ke seluruh domain yang cembung, maka f dipanggil fungsi cembung.

Rajah 1.2 menunjukkan gambaran domain cembung melalui perwakilan geometrinya.



Rajah 1.2 Domain cembung

(Sumber daripada Goodman, 1975)

1.4 Perwakilan Beranalisis

Perwakilan beranalisis bagi dua subkelas S iaitu kelas fungsi bakbintang dan kelas fungsi cembung dinyatakan di dalam bahagian ini.

1.4.1 Fungsi Bakbintang

Definisi 1.4.1.1 (Goodman, 1975) Suatu fungsi $f \in S^*$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0, \qquad z \in D. \tag{1.3}$$

RUJUKAN

Clunie, J. & Keogh, F.R. 1960. On starlike and convex schlicht functions. *J. London Math. Soc.* **35**, ms. 229-233.

Das, R.N. & Singh, P. 1977. On subclasses of schlicht function mapping. *Indian J. Pure Appl. Math.* **8**, ms. 864-872.

El-Ashwah, R.M. & Thomas, D.K. 1987. Some subclasses of close-to-convex functions. *J. Ramanujan Math. Soc.* **2**, ms. 86-100.

Goodman, A.W. 1975. *Univalent Functions*. Mariner Publishing Company, Inc, Tampa, Florida. **1**, ms. 246.

Halim, S.A., Janteng, A. & Darus, M. 2005. Coefficient properties for classes with negative coefficients and starlike with respect to other points. *Proceeding of The 13th Mathematical Sciences National Symposium* **2**, ms. 658-663.

Khairnar, S. M. & More, M. 2008. Subclass of univalent functions with negative coefficients and starlike with respect to symmetric and conjugate points. *Applied Mathematical Science.* **2**, ms. 1739-1748.

Owa, S. 1983. On hadamard products for certain classes of univalent functions with negative coefficients. *J. Korean Math. Soc.* **19**, ms. 75-82.

Owa, S. 1984. On the special classes of univalent functions. *Tamkang J.* **15**, ms. 123-136.

Owa, S. & Pascu, N.N. 2003. Coefficient inequalities for certain classes of meromorphically starlike and meromorphically convex function. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. **4**, ms. 1-14.

Ressang, A. 1995. *Pembolehubah Kompleks Permulaan*. Jilid **1**. Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur. ms. 85.

Ressang, A. 1995. *Pembolehubah Kompleks Permulaan*. Jilid **2**. Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur. ms. 23.

Sakaguchi, K. 1959. On certain univalent mapping. *J. Math. Soc. Japan.* **11**, ms. 72-75.

Silverman, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.* **51**, ms. 109-116.

Sudharsan, T.V., Balasubrahmananyam, P. & Subramanian, K.G. 1998. On functions starlike with respect to symmetric and conjugate points. *Taiwanese Journal of Mathematics* **2**, ms. 57-68.

Wong, S.J. & Janteng, A. 2008. Classes with Negative Coefficients and Convex with Respect to Others Points. *International Journal Contemporary Mathematical Sciences* **3**(11), ms. 511-518.