

**KEEFISIENAN PENGIRAAN BAGI FAMILI  
Kaedah Lelaran Kumpulan Tak  
Tersirat Dengan Penjelmaan  
Keserupaan Ke Atas Persamaan  
Terbitan Separa Parabolik Satu Matra**

**NUR AFZA MAT ALI**

**PERPUSTAKAAN  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH**

**TESISINI DIKEMUKAKAN UNTUK  
MEMENUHI SYARAT MEMPEROLEH  
IJAZAH SARJANA SAINS**

**FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH  
2019**



**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

**UNIVERSITI MALAYSIA SABAH**

**BORANG PENGESAHAN TESIS**

JUDUL: **KEEFISIENAN PENGIRAAN BAGI FAMILI KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT DENGAN PENJELMAAN KESERUPAAN KE ATAS PERSAMAAN TERBITAN SEPARA PARABOLIK SATU MATRA**

IJAZAH: **SARJANA SAINS (MATEMATIK)**

Saya **NUR AFZA BINTI MAT ALI**, sesi **2018-2019**, mengaku membenarkan tesis Sarjana ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:

1. Tesis ini adalah hak milik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/):

**SULIT**

(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan, Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA 1972)

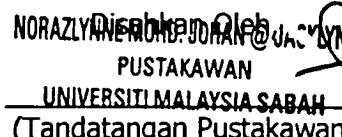
**TERHAD**

(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)

**TIDAK  
TERHAD**

  
**NUR AFZA BINTI MAT ALI**  
**MS1721050T**

Tarikh: 20 SEPTEMBER 2019

  
NORAZLYNIE RUMAH JUMAN @ JAYNE  
PUSTAKAWAN  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH  
(Tandatangan Pustakawan)

  
Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman  
Penyelia



**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

## **PENGAKUAN**

Saya mengaku bahawa kajian ini merupakan hasil nukilan saya sendiri dan sebarang rujukan telah saya jelaskan sumbernya.

27 Mei 2019



---

Nur Afza Binti Mat Ali

MS1721050T



## PENGESAHAN

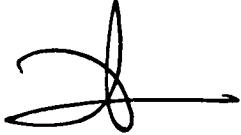
NAMA : **NUR AFZA BINTI MAT ALI**  
NO. MATRIK : **MS1721050T**  
TAJUK : **KEEFISIENAN PENGIRAAN BAGI FAMILI KADEAH  
LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT DENGAN  
PENJELMAAN KESERUPAAN KE ATAS PERSAMAAN  
TERBITAN SEPARA PARABOLIK SATU MATRA**  
IJAZAH : **SARJANA SAINS (MATEMATIK)**  
TARIKH VIVA : **28 OGOS 2019**

### DISAHKAN OLEH:

#### **PENYELIA**

Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman

**Tandatangan**



## **PENGHARGAAN**

Terlebih dahulu saya ingin mengucapkan syukur Alhamdulillah ke hadrat Allah S.W.T. kerana di atas limpah dan kurniaNya, maka dapatlah saya menyiapkan tesis ini dengan jayanya walaupun menempuh pelbagai dugaan dan rintangan.

Di kesempatan ini, saya ingin mengucapkan jutaan terima kasih yang tidak terhingga kepada Prof. Madya. Dr. Jumat Sulaiman, selaku penyelia saya di atas bimbingan, pandangan dan tunjuk ajar yang dihulurkan banyak membantu kepada kejayaan dalam penghasilan tesis ini. Saya amat menghargai kesabaran beliau yang sedia berkongsi maklumat dan kepakarannya sepanjang pengajian ini.

Ucapan jutaan terima kasih juga dirakamkan kepada kedua ibu bapa yang saya hormati dan ahli keluarga saya yang telah memberi galakan dan dorongan sepanjang kajian ini dijalankan. Tidak lupa juga saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada rakan-rakan seperjuangan, Nor Syahida Mohamad, Labiyana Hanif Ali, Nur Farah Azira Zainal, Nurul Afiqah Basran dan Rostang Rahman atas bantuan dan nasihat yang telah diberi sepanjang pengajian ini dijalankan.

Begitu juga kepada pihak Universiti Malaysia Sabah yang telah menawarkan skim geran bantuan penyelidikan pascasiswazah (UMSGreat) Fasa 1/2018 dengan kod projek GUG0225-1/2018 kepada saya. Akhir kata, ucapan terima kasih juga kepada semua yang terlibat secara langsung dan tidak langsung dalam memberikan sumbangan, cadangan dan bantuan dalam menyiapkan tesis ini.

Nur Afza Binti Mat Ali

27 Mei 2019



## **ABSTRAK**

Kajian ini cuba membuat penelitian ke atas keefisienan pengiraan bagi famili kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat dengan pendekatan penjelmaan keserupaan dalam menyelesaikan persamaan terbitan separa (PTS) parabolik terutamanya persamaan resapan alir lintang (PRAL) dan persamaan resapan tindak balas (PRTB). Penjelmaan keserupaan digunakan untuk menurunkan PTS kepada persamaan terbitan biasa (PTB), khususnya masalah nilai sempadan dua titik sebelum diselesaikan secara berangka. Kemudian, proses pendiskretan ke atas masalah nilai sempadan dua titik yang sepadan dilaksanakan dengan menggunakan pendekatan skema beza terhingga keserupaan sapuan penuh, separuh dan suku untuk mendapatkan persamaan penghampiran beza terhingga keserupaan yang sepadan. Seterusnya, persamaan penghampiran beza terhingga keserupaan yang diperoleh tersebut dipertimbangkan untuk menjana sistem persamaan linear yang sepadan. Didapati, sistem persamaan linear tunggal mempunyai matriks pekali yang berskala besar dan bersifat jarang. Oleh itu, famili kaedah lelaran titik pengenduran berlebihan berturut-turut (SOR) dan famili kaedah lelaran blok SOR khususnya 4-titik kumpulan tak tersirat SOR digunakan untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi sistem persamaan linear tersebut. Keefisienan pengiraan bagi famili kaedah lelaran titik SOR dan famili kaedah lelaran blok SOR telah diteliti dengan menyelesaikan empat contoh permasalahan PRAL dan PRTB. Keputusan berangka yang diperoleh menunjukkan gandingan skema beza terhingga keserupaan dengan famili kaedah lelaran blok SOR adalah paling efisien dari segi bilangan lelaran dan masa lelaran dalam menyelesaikan PRAL dan PRTB jika dibandingkan dengan famili kaedah lelaran titik SOR.

## **ABSTRACT**

### **THE COMPUTATIONAL EFFICIENCY OF THE EXPLICIT GROUP ITERATIVE FAMILY WITH SIMILARITY TRANSFORMATION FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION**

*This study attempts to do investigation on the computational efficiency of Explicit Group iterative family with similarity transformation approach in solving the parabolic partial differential equation (PDE) particularly advection-diffusion equation (ADE) and reaction diffusion equation (RDE). The similarity transformation is used to reduce the PDE to ordinary differential equation (ODE), especially the problem of two-point boundary values before to being solve numerically. Then, discretization process of the corresponding two-point boundary problem is implemented by using full-, half- and quarter-sweep similarity finite difference scheme approach to obtain the corresponding similarity finite difference approximation equation. Next, the obtained similarity finite difference approximation equation is considered to generate the corresponding linear equation system. It is found that a single linear equation system having a coefficient matrix with large-scale and sparse. Therefore, the successive over-relaxation (SOR) point iterative family and the SOR block iterative method, especially the 4-point Explicit Group SOR, are used to obtain an approximate solution for the linear equation system. The computational efficiency of the SOR point iterative method and the SOR block iterative method has been studied by solving four examples of ADE and RDE problems. The numerical results obtained show that the combination of similarity finite difference scheme with family SOR block iterative method is most efficient in terms of number of iteration and execution time in solving ADE and RDE compared to SOR point iterative method.*



## **ISI KANDUNGAN**

	Halaman
<b>TAJUK</b>	i
<b>PENGAKUAN</b>	ii
<b>PENGESAHAN</b>	iii
<b>PENGHARGAAN</b>	iv
<b>ABSTRAK</b>	v
<b>ABSTRACT</b>	vi
<b>ISI KANDUNGAN</b>	vii
<b>SENARAI JADUAL</b>	xi
<b>SENARAI RAJAH</b>	xiii
<b>SENARAI FOTO</b>	xvi
<b>SENARAI ALGORITMA</b>	xvii
<b>SENARAI SIMBOL</b>	xviii
<b>SENARAI SINGKATAN</b>	xix
<b>SENARAI LAMPIRAN</b>	xxi
<b>BAB 1: PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Pengenalan	1
1.2 Persamaan Terbitan	2
1.2.1 Persamaan Terbitan Biasa	3
1.2.2 Persamaan Terbitan Separa	3
1.3 Pemerihalan Penjelmaan Keserupaan	5
1.4 Pemerihalan Persamaan Resapan Alir Lintang	6
1.5 Pemerihalan Persamaan Resapan Tindak Balas	7
1.6 Pemerihalan Konsep Matematik Asas	7
1.6.1 Kembangan Siri Taylor	8
1.6.2 Pemerihalan Norma Vektor dan Matriks	9
a. Norma Vektor	10
b. Norma Matriks	10
1.7 Sistem Persamaan Linear	11
1.8 Permasalahan Kajian	13
1.9 Objektif kajian	15



1.10	Skop Kajian	15
1.11	Kerangka Kajian	18
<b>BAB 2: SOROTAN LITERATUR</b>		19
2.1	Pengenalan	19
2.2	Kepelbagai Kaedah Penyelesaian bagi Permasalahan Persamaan Resapan Alir Lintang	20
2.3	Kepelbagai Kaedah Penyelesaian bagi Permasalahan Persamaan Resapan Tindak Balas	21
2.4	Penjelmaan Keserupaan	23
2.5	Perkembangan Beza Terhingga	25
2.6	Perkembangan Kaedah Penyelesaian Sistem Persamaan Linear	26
2.6.1	Sorotan Kaedah Lelaran Gauss-Seidel	27
2.6.2	Sorotan Kaedah Lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut	27
2.6.3	Sorotan Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-turut	28
2.7	Sorotan Famili Kaedah Lelaran	29
2.7.1	Kaedah Lelaran Berkonsepkan Sapuan Penuh	29
2.7.2	Kaedah Lelaran Berkonsepkan Sapuan Separuh	30
2.7.3	Kaedah Lelaran Berkonsepkan Sapuan Suku	31
2.8	Motivasi Kajian dan Rumusan	33
<b>BAB 3: PERUMUSAN PERSAMAAN PENGHAMPIRAN BEZA TERHINGGA KESERUPAAN KE ATAS PERMASALAHAN KAJIAN</b>		34
3.1	Pengenalan	34
3.2	Pemerihalan Penjelmaan Keserupaan Khususnya Jelmaan Pembolehubah Gelombang	35
3.3	Pembentukan Rangkaian Grid dan Perumusan Pengoperasi Beza Terhingga Keserupaan Pusat Pelbagai Sapuan	37
3.4	Perumusan Penurunan dan Pendiskretan Beza Terhingga ke Atas Permasalahan Kajian	40

3.4.1	Perihalan Penjelmaan Keserupaan ke atas Masalah Resapan Alir Lintang	40
a.	Perumusan Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Pelbagai Sapuan	41
3.4.2	Perihalan Jelmaan Keserupaan ke atas Masalah Resapan Tindak Balas	42
a.	Perumusan Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Pelbagai Sapuan	43
3.5	Perumusan Kaedah Berangka	44
3.5.1	Perumusan Famili Kaedah Lelaran GS	45
3.5.2	Perumusan Famili Kaedah Lelaran SOR	47
3.5.3	Perumusan Famili Kaedah Lelaran 4EGSOR	50
<b>BAB 4: PENYELESAIAN BEZA TERHINGGA KESERUPAAN</b>		56
<b>BAGI PERSAMAAN RESAPAN ALIR LINTANG</b>		
4.1	Pengenalan	56
4.2	Pemerihalan Permasalahan Kajian yang Dipertimbangkan	56
4.2.1	Pemerihalan Keputusan Berangka bagi Penyelesaian PRAL	58
a.	Bentuk Am Bagi Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Keserupaan	58
b.	Keputusan Ujikaji Berangka dan Perbincangan	59
4.2.2	Analisis Kekompleksan Pengiraan	76
4.3	Rumusan Perbincangan	78
<b>BAB 5: PENYELESAIAN BEZA TERHINGGA KESERUPAAN</b>		79
<b>BAGI PERSAMAAN RESAPAN TINDAK BALAS</b>		
5.1	Pengenalan	79
5.2	Permasalahan Persamaan Resapan Tindak Balas	79
5.2.1	Pemerihalan Keputusan Berangka bagi Penyelesaian PRTB	81
a.	Bentuk Am bagi Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Keserupaan	81
b.	Keputusan Ujikaji Berangka dan Perbincangan	81



5.2.2	Analisis Kekompleksan Pengiraan	99
5.3	Rumusan Perbincangan	100
<b>BAB 6: RUMUSAN KAJIAN DAN KESIMPULAN</b>		101
6.1	Rumusan Dapatan Kajian	101
6.2	Sumbangan Kajian	102
6.3	Cadangan Kajian Lanjut	103
<b>RUJUKAN</b>		105
<b>LAMPIRAN</b>		114

## SENARAI JADUAL

	Halaman
Jadual 4.1 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 4.1	70
Jadual 4.2 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 4.2	71
Jadual 4.3 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 4.3	72
Jadual 4.4 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 4.4	73
Jadual 4.5 Peratusan penurunan bilangan lelaran dan masa lelaran bagi famili kaedah lelaran dibandingkan dengan kaedah lelaran FSGS ke atas Masalah 4.1, 4.2, 4.3 dan 4.4	74
Jadual 4.6 Bilangan operasi aritmetik per lelaran pada satu titik grid bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 4.1 hingga 4.4	77
Jadual 5.1 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 5.1	93
Jadual 5.2 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 5.2	94
Jadual 5.3 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 5.3	95
Jadual 5.4 Perbandingan bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat maksimum bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 5.4	96



Jadual 5.5	Peratusan penurunan bilangan lelaran dan masa lelaran bagi famili kaedah lelaran dibandingkan dengan kaedah lelaran FSGS ke atas Masalah 5.1 hingga 5.4	97
Jadual 5.6	Bilangan operasi aritmetik per lelaran pada satu titik grid bagi kedua-dua famili kaedah lelaran ke atas Masalah 5.1 hingga 5.4	100



## **SENARAI RAJAH**

	Halaman
Rajah 1.1 Ciri-ciri bagi persamaan terbitan	2
Rajah 1.2 Jenis-jenis asas bagi PTS linear	4
Rajah 1.3 Jenis-jenis syarat sempadan	5
Rajah 1.4 Kaedah penyelesaian sistem persamaan linear	12
Rajah 1.5 Tatacara penyelesaian PRAL dan PRTB menerusi kaedah berangka	13
Rajah 1.6 Klasifikasi umum kaedah lelaran yang dipertimbangkan	14
Rajah 1.7 Skop kajian	17
Rajah 3.1 Grid beza terhingga bagi lima segmen	37
Rajah 3.2 Taburan titik nod seragam bagi kes sapuan (a) penuh, (b) separuh dan (c) suku	38
Rajah 3.3 Carta aliran bagi lelaran GS	47
Rajah 3.4 Carta aliran bagi lelaran SOR	50
Rajah 3.5 Pelaksanaan kaedah lelaran 4EGSOR bagi kes sapuan penuh ke atas domain penyelesaian	51
Rajah 3.6 Pelaksanaan kaedah lelaran 4EGSOR bagi kes sapuan separuh ke atas domain penyelesaian	51
Rajah 3.7 Pelaksanaan kaedah lelaran 4EGSOR bagi kes sapuan suku ke atas domain penyelesaian	51
Rajah 3.8 Carta aliran bagi lelaran 4-EGSOR	55
Rajah 4.1 Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.1 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	60
Rajah 4.2 Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.1 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	61
Rajah 4.3 Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.2 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	62

Rajah 4.4	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.2 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	63
Rajah 4.5	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.3 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	64
Rajah 4.6	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.3 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	65
Rajah 4.7	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.4 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	66
Rajah 4.8	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.4 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	67
Rajah 4.9	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.1 hingga 4.4 bagi kaedah lelaran QSSOR dan QS4EGSOR	68
Rajah 4.10	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 4.1 hingga 4.4 bagi kaedah lelaran QSSOR dan QS4EGSOR	69
Rajah 5.1	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.1 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	83
Rajah 5.2	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.1 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	84
Rajah 5.3	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.2 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	85
Rajah 5.4	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.2 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	86

Rajah 5.5	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.3 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	87
Rajah 5.6	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.3 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	88
Rajah 5.7	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.4 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	89
Rajah 5.8	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.4 bagi kedua-dua famili kaedah lelaran	90
Rajah 5.9	Perbandingan bilangan lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.1 hingga 5.4 bagi kaedah lelaran QSSOR dan QS4EGSOR	91
Rajah 5.10	Perbandingan masa lelaran dengan skema beza terhingga keserupaan ke atas Masalah 5.1 hingga 5.4 bagi kaedah lelaran QSSOR dan QS4EGSOR	92



## **SENARAI FOTO**

	Halaman
Foto 1.1 Pengasas Siri Taylor	8



## **SENARAI ALGORITMA**

	Halaman
Algoritma 3.1 Skema Kaedah Lelaran GS Sapuan Penuh	45
Algoritma 3.2 Skema Kaedah Lelaran GS Sapuan Separuh	46
Algoritma 3.3 Skema Kaedah Lelaran GS Sapuan Suku	46
Algoritma 3.4 Skema Kaedah Lelaran SOR Sapuan Penuh	48
Algoritma 3.5 Skema Kaedah Lelaran SOR Sapuan Separuh	48
Algoritma 3.6 Skema Kaedah Lelaran SOR Sapuan Suku	49
Algoritma 3.7 Skema Kaedah Lelaran 4EGSOR Sapuan Penuh	53
Algoritma 3.8 Skema Kaedah Lelaran 4EGSOR Sapuan Separuh	53
Algoritma 3.9 Skema Kaedah Lelaran 4EGSOR Sapuan Suku	54



## SENARAI SIMBOL

$+$	- Tambah
$-$	- Tolak
$\pm$	- Tambah tolak
$\times$	- Darab
$=$	- Sama dengan
$\cong$	- Kongruen dengan
$<$	- Lebih kecil daripada
$\leq$	- Lebih kecil atau sama dengan
$>$	- Lebih besar daripada
$\geq$	- Lebih besar atau sama dengan
$\mathbb{R}$	- Nombor nyata
$\in$	- Unsur kepada
$\varepsilon$	- Ralat toleransi
$\delta$	- Delta
$\Delta x$	- Tokokan pada ruang $x$
$\Delta t$	- Tokokan pada masa $t$
$\omega$	- Parameter pengenduran
$\xi$	- Pembolehubah gelombang
$n$	- Jumlah titik grid
$N$	Saiz matriks
$n - 1$	- Bilangan titik nod kedalaman dalam penyelesaian domain
$u_i^{(k)}$	- Vektor yang tidak diketahui pada lelaran $k$
$u_i^{(k+1)}$	- Vektor yang tidak diketahui pada lelaran $k + 1$
$k$	- Lelaran
$u(x, t)$	- Penyelesaian tepat
$W$	- Matriks pekali
$D$	- Matriks pepenjuru
$L$	- Matrik segitiga bawah
$U$	- Matrik segitiga atas

## SENARAI SINGKATAN

<b>1D</b>	Satu Matra	One Dimensional
<b>2D</b>	Dua Matra	Two Dimensional
<b>2EGSOR</b>	2-Titik Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut	2-Point Explicit Successive Over-Relaxation
<b>4EGSOR</b>	4-Titik Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut	4-Point Explicit Successive Over-Relaxation
<b>ADI</b>	Tersirat Arah Berselang-Seli	Alternating Direction Implicit
<b>ADM</b>	Kaedah Penguraian Adomian	Adomian Decomposition Method
<b>AM</b>	Min Aritmetik	Arithmetic Mean
<b>AOR</b>	Pengenduran Berlebihan Berpecutan	Accelerated Overrelaxation
<b>CD6</b>	Beza Terhingga Padat Peingkat Keempat	Sixth-Order Compact Difference
<b>CN</b>	Crank-Nicolson	Crank-Nicolson
<b>DQM</b>	Kaedah Terbitan Kuadratur	Differential Quadrature Method
<b>DTM</b>	Kaedah Penjelmaan Terbitan	Differential Transform Method
<b>EDG</b>	Kumpulan Tak Tersirat Nyahpasangan	Explicit Decoupled Group
<b>EG</b>	Kumpulan Tak Tersirat	Explicit Decoupled
<b>EGSOR</b>	Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut	Explicit Successive Over-Relaxation
<b>FDM</b>	Kaedah Beza Terhingga	Finite-Difference Methods
<b>FOFDM</b>	Kaedah Beza Terhingga Peringkat Keempat	Fourth Order Finite-Difference Methods
<b>FSGS</b>	Gauss-Seidel Sapuan Penuh	Full-Sweep Gauss-Seidel
<b>FSSOR</b>	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Sapuan Penuh	Full-Sweep Successive Over-Relaxation



<b>FS4EGSOR</b>	4-Titik Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut- Turut Sapuan Penuh	Full-Sweep 4-Point Explicit Successive Over-Relaxation
<b>FTCS</b>	Beza Depan Masa Dan Pusatan Ruang	Forward-Time Central-Space
<b>FVM</b>	Kaedah Isipadu Terhingga	Finite-Difference Methods
<b>GS</b>	Gauss-Seidel	Gauss-Seidel
<b>HAM</b>	Kaedah Analisis Homotopi	Homotopy Analysis Method
<b>HSGS</b>	Gauss-Seidel Sapuan Separuh	Half-Sweep Gauss-Seidel
<b>HSSOR</b>	Pengenduran Berlebihan Berturut- Turut Sapuan Separuh	Half-Sweep Successive Over- Relaxation
<b>HS4EGSOR</b>	4-Titik Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut- Turut Sapuan Separuh	Half-Sweep 4-Point Explicit Successive Over-Relaxation
<b>HPM</b>	Kaedah Usikan Homotopi	Homotopy Perturbation Method
<b>MEG</b>	Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai	Modified Explicit Group
<b>PRAL</b>	Persamaan Resapan Alir Lintang	Advection-Diffusion Equation
<b>PRTB</b>	Persamaan Resapan Tindak Balas	Reaction-Diffusion Equation
<b>PT</b>	Persamaan Terbitan	Differential Equation
<b>PTB</b>	Persamaan Terbitan Biasa	Ordinary Differential Equation
<b>PTS</b>	Persamaan Terbitan Separa	Partial Differential Equation
<b>QSGS</b>	Gauss-Seidel Sapuan Suku	Quarter-Sweep Gauss-Seidel
<b>QSSOR</b>	Pengenduran Berlebihan Berturut- Turut Sapuan Suku	Quarter-Sweep Successive Over-Relaxation
<b>QS4EGSOR</b>	4-Titik Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut- Turut Sapuan Suku	Quarter-Sweep 4-Point Explicit Successive Over- Relaxation
<b>RK4</b>	Runge-Kutta	Fourth-Order Runge-Kutta
<b>SOR</b>	Pengenduran Berlebihan Berturut- Turut	Successive Over-Relaxation

## **SENARAI LAMPIRAN**

		<b>Halaman</b>
Lampiran	Penerbitan	<b>114</b>



## **BAB 1**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1 Pengenalan**

Kebanyakan persamaan yang muncul dalam ilmu sains dan kejuruteraan dapat diperihalkan secara umum oleh persamaan terbitan separa (PTS) jenis parabolik (Chaudhry *et al.*, 1983; Guvanasen & Volker, 1983; Zlatev *et al.*, 1984). Seperti yang diketahui, PTS mempunyai tiga jenis asas persamaan linear iaitu eliptik, parabolik dan hiperbolik. Namun kajian ini memfokuskan kepada PTS parabolik. PTS parabolik merupakan persamaan terbitan separa yang membabitkan dua atau lebih pembolehubah tak bersandar. Hakikatnya, PTS boleh diselesaikan secara analitik mahupun menggunakan kaedah berangka (Sulaiman *et al.*, 2009a; 2009b; 2010; Sunarto *et al.*, 2014). Walau bagaimanapun, kajian ini memilih jalan penyelesaian bagi PTS parabolik secara berangka menerusi pendekatan "penjelmaan keserupaan" dan kaedah beza terhingga. Hal ini kerana seringkali PTS parabolik adalah terlalu rumit untuk diselesaikan secara analitik.

Secara amnya, kaedah berangka merupakan kaedah alternatif dalam mendapatkan suatu penyelesaian hampiran kepada suatu masalah sama ada dalam bidang sains atau kejuruteraan. Dalam kebanyakan kes, penyelesaian hampiran yang diperolehi menerusi kaedah berangka menghasilkan ralat tertentu. Dapat diperhatikan bahawa pendekatan kaedah berangka bukan sahaja tertumpu kepada teknik untuk memperolehi penyelesaian sahaja, malah turut meneliti sama ada ralat yang dihasilkannya adalah cukup kecil untuk membolehkan penyelesaian hampiran yang diperolehi boleh diterima, atau sebaliknya. Secara kesimpulannya, kajian ini

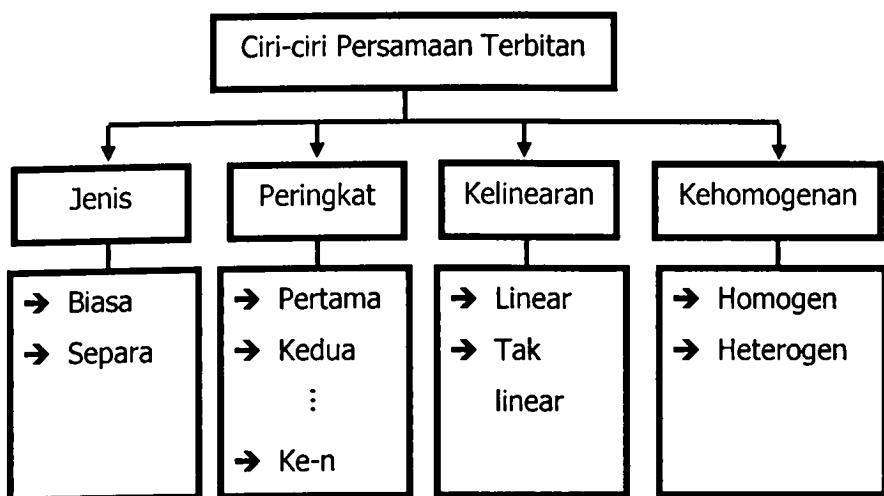


**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

dijalankan untuk menyelesaikan PTS parabolik secara berangka menerusi pendekatan penjelmaan keserupaan dan kaedah beza terhingga dan seterusnya sistem persamaan linear yang dijana melalui persamaan penghampiran beza terhingga keserupaan cuba diselesaikan menggunakan famili kaedah lelaran titik pengenduran berlebihan berturut-turut (SOR) dan famili kaedah lelaran blok SOR untuk memperolehi penyelesaian hampiran. Penjelasan lanjut tentang kombinasi kedua-dua kaedah ini cuba diperihalkan secara terperinci pada Bab 3.

## 1.2 Persamaan Terbitan

Persamaan terbitan (PT) dapat ditakrifkan sebagai sebarang persamaan yang mengandungi satu terbitan atau lebih ke atas pembolehubah bersandar dengan merujuk kepada satu atau lebih pembolehubah tidak bersandar (Zill & Cullen, 2005). PT memainkan peranan yang sangat penting dalam fenomena sains dan kejuruteraan. Hal ini kerana, terdapat banyak model matematik yang dirumuskan berdasarkan fenomena tersebut adalah dinyatakan dalam bentuk PT. Berikut menunjukkan ciri-ciri bagi PT yang cuba dibincangkan pada sekysen ini:



**Rajah 1.1: Ciri-ciri bagi persamaan terbitan**

Memandangkan kajian ini cuba mempertimbangkan permasalahan PTS parabolik dan seterusnya dijelmakan kepada persamaan terbitan biasa (PTB) menggunakan penjelmaan keserupaan, maka perbincangan selanjutnya memfokuskan kepada pemerihalan PTB dan PTS.

## RUJUKAN

- Abdullah, A. R. 1991. The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) Method: A Fast Poisson Solver. *International Journal of Computer Mathematics*. 38(1-2): 61-70.
- Abiprayu, K., Abdigusna, M. F. F. & Gunawan, P. H. 2018. Steady State Numerical Solutions for Determining the Location of MEMS on Projectile. *Journal of Physics: Conference Series*. 971(1): 012019.
- Ahmad, K. & Nazar, R. 2010. Unsteady Magnetohydrodynamic Mixed Convection Stagnation Point Flow of a Viscoelastic Fluid On a Vertical Surface. *Journal of Quality Measurement and Analysis*. 6(2): 105-117.
- Akhir, M. K. M., Othman, M., Sulaiman, J., Majid, Z. A. & Suleiman, M. 2011. Half-Sweep Modified Successive over Relaxation for Solving Two-Dimensional Helmholtz Equations. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*. 5(12): 3033-3039.
- Akhir, M. K. M., Othman, M., Sulaiman, J., Majid, Z. A. & Suleiman, M. 2012. Half Sweep Iterative Method for Solving Two-Dimensional Helmholtz Equations. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 29: 101-109.
- Akhir, M. K. M. & Sulaiman, J. 2015. HSGS Method for the Finite Element Solution of Two-Dimensional Helmholtz Equations. *Global Journal of Mathematics*. 4(1): 367-737.
- Akhir, M. K. M. & Sulaiman, J. 2016. An Implementation of QSAOR Iterative Method for Non-Homogeneous Helmholtz Equations. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. 11(2): 85-96.
- Alibubin, M. U., Sunarto, A., Akhir, M. K. M. & Sulaiman, J. 2016. Performance Analysis of Half-sweep SOR Iteration with Rotated Nonlocal Arithmetic Mean Scheme for 2D Nonlinear Elliptic Problems. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 12(4): 3415-3424.
- Al-Sawoor, A. J. & Al-Amr, M. O. 2012. Numerical Solution of a Reaction-Diffusion System with Fast Reversible Reaction by Using Adomian's Decomposition Method and He's Variational Iteration Method. *Al-Rafidain Journal of Computer Sciences and Mathematics*. 9(2): 243–257.
- Alshammari, B. S. & Mashat, D. S. 2017. Numerical Study of Fisher's Equation by Finite Difference Schemes. *Applied Mathematics*. 8(8): 1100–1116.
- Ashbourn, J. M. A., Geris, L., Gerisch, A. & Young, C. J. S. 2010. Numerical Simulation of Two-Dimensional and Three-Dimensional Axisymmetric Advection-Diffusion Systems with Complex Geometries Using Finite-Volume Methods. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 466(2118): 1621–1643.

- Atkinson, K. E., Han, W. & Stewart, D. E. 2009. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.
- Bahar, E. & Gürarslan, G. 2017. Numerical Solution of Advection-Diffusion Equation Using Operator Splitting Method. *International Journal of Engineering & Applied Sciences*. 9(4): 76–88.
- Bakari, A. & Dahiru, I. 2018. Comparison of Jacobi and Gauss-Seidel Iterative Methods for the Solution of Systems of Linear Equations. *Asian Research Journal of Mathematics*. 8(3): 1–7.
- Benito, J. J., Urena, F. & Gavete, L. 2003. Solving Parabolic and Hyperbolic Equations by The Generalized Finite Difference Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 209: 208–233.
- Bibi, S. & Mahyuddin, S. T. 2014. Travelling Wave Solutions of KdVs Using Sine-Cosine Method. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*. 5: 90–93.
- Bindel, D. A. 2009. *Metrics Computations*. Lecture Notes in Department of Computer Science, Cornell University, USA.
- Cain, J. W. 2014. *Mathematical Models in the Sciences*. In: Molecular Life Sciences: An Encyclopedic Reference, Springer.
- Chapra, S. C. & Canale, R. P. 2006. *Numerical Method for Engineers*. 10<sup>th</sup> ed. New York: McGraw Hill.
- Chaudhry, M. H., Cass, D. E. & Edinger, J. E. 1983. Modelling of Unsteady-Flow Water Temperatures. *Journal of Hydraulic Engineering*. 109(5): 657–669.
- Chawla, M. M., Al-Zanaidi, M. A. & Al-Aslab, M. G. 2000. Extended One-Step Time-Integration Schemes for Convection-Diffusion Equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 39: 71–84.
- Chew, J. V. L. & Sulaiman, J. 2018. Implicit Finite Difference Solution of One-Dimensional Porous Medium Equations Using Half-Sweep Newton-Explicit Group Iterative Method. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 13(5): 1286–1290.
- Ho, C. L. & Yang, C. M. 2019. Convection-Diffusion-Reaction Equation with Similarity Solutions. *Chinese Journal of Physics*. 59: 117–125.
- Conte, S. D. & de Boor, C. 1980. *Analisis Berangka Permulaan Suatu Pendekatan Algoritma*. Terjemahan Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.
- De Loubens, R. & Ramakrishnan, T. S. 2011. Asymptotic Solution of a Nonlinear Advection-Diffusion Equation. *Quarterly of Applied Mathematics*. 69(2): 389–401.

- Dehghan, M. 2004a. Weighted Finite Difference Techniques for the One-Dimensional Advection–Diffusion Equation. *Applied Mathematics Computation*. 147: 307–319.
- Dehghan, M. 2004b. Numerical Solution of the Three-Dimensional Advection–Diffusion Equation. *Applied Mathematics Computation*. 150: 5–19.
- Deghan, M. 2003. Numerical Solution of One-Dimensional Parabolic Inverse Problem. *Applied Mathematics and Computation*. 136: 333–344.
- Dhawan, S., Rawat, S., Kumar, S. & Kapoor, S. 2011. Solution of Advection Diffusion Equation Using Finite Element Method. *International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*. Kuala Lumpur, Malaysia.
- Evans, D. J. & Abdullah, A. R. 1983. Group Explicit Methods for Parabolic Equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 14(1): 73–105.
- Evans, D. J & Yousif, W. S. 1986. Explicit Group Iterative Methods for Solving Elliptic Partial Differential Equations in 3-Space Dimensions. *International Journal of Computer Mathematics*. 18: 323–340.
- Eng, J. H., Saudi, A. & Sulaiman J. 2019. *Implementation of Quarter-Sweep Approach in Poisson Image Blending Problem*. Computational Science and Technology. Singapore: Springer.
- Fattah, Q. N. & Hoopes, J. A. 1985. Dispersion in Anisotropic Homogeneous Porous Media. *Journal of Hydraulic Engineering*. 111: 810–27.
- Faires, J. D. & Burden, R. 2011. *Numerical methods*. 9<sup>th</sup> ed. California: Thomson.
- Fukuchi, T. 2014. Finite Difference Method and Algebraic Polynomial Interpolation for Numerically Solving Poisson's Equation over Arbitrary Domains. *AIP Advances*. 4(6): 060701.
- Ghazali, K., Sulaiman, J., Dasril, Y. & Gabda, D. 2019. *Application of Newton-4EGSOR Iteration for Solving Large Scale Unconstrained Optimization Problems with a Tridiagonal Hessian Matrix*. In: Alfred R., Lim Y., Ibrahim A., Anthony P. (eds) Computational Science and Technology. Lecture Notes in Electrical Engineering. Singapore: Springer.
- Gorgulu, M. Z. & Dag, I. 2018. Galerkin Method for the numerical solution of the advection-diffusion equation by using exponential B-splines. *International Journal of Mathematical Modelling and Computations*. 8(2018): 1–13.
- Gupta, P. K. & Verma, S. 2012. A Numerical Study of the Nonlinear Reaction-Diffusion Equation with Different Type of Absorbent Term by Homotopy Analysis Method. *Journal of Physical Sciences*. 67(10–11): 621–627.
- Gupta, S., Kumar, D. & Singh, J. 2015. Analytical Solutions of Convection-Diffusion Problems by Combining Laplace Transform Method and Homotopy Perturbation Method. *Alexandria Engineering Journal*. 54: 645–651.

- Gurarslan, G., Karahan, H., Alkaya, D., Sari, M. & Yasar, M. 2013. Numerical Solution of Advection-Diffusion Equation Using a Sixth-Order Compact Finite Difference Method. *Mathematical Problems in Engineering*. 1–7.
- Guvanason, V. & Volker, R. E. 1983. Numerical Solutions for Solute Transport in Unconfined Quifers. *International Jouernal of Numerical Methods Fluids*. 3: 103-123.
- Hamada, S. & Sekino, H. 2016. Solution of Nonlinear Advection-Diffusion Equations via Linear Fractional Map Type Nonlinear QCA. *Journal of Quantum Information Science*. 6(4): 263–295.
- HarpinderKaur, & KhushpreetKaur. 2012. Convergence of Jacobi and Gauss-Seidel Method and Error Reduction Factor. *IOSR Journal of Mathematics*. 2(2): 20-23.
- Hasnain, S., Saqib, M. & Mashat, D. S. 2017. Two-Dimensional Nonlinear Reaction Diffusion Equation with Time Efficient Scheme. *American Journal of Computational Mathematics*. 7(2): 183–194.
- Ibrahim, A. 1993. *The Study of the Iterative Solution of Boundary Value Problem by the Finite Difference Methods*. PhD Thesis. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Inan, B., & Bahadir, A. R. 2015. Numerical Solutions of MRLW Equation by A Fully Implicit Finite-difference Scheme. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 15: 228–239.
- Isenberg, J. & Gutfinger, C. 1972. Heat Transfer to a Draining Film. *International Journal of Heat Transfer*. 16: 505-12.
- Ishak, A., Nazar, R., Arifin, N. M., Ali, F. M. & Pop, I. 2011. MHD Stagnation-Point Flow Towards a Stretching Sheet with Prescribed Surface Heat Flux. *Sains Malaysiana*. 40(10): 1193–1199.
- Ishak, A. 2010. Aliran Lapisan Sempadan Bersebelahan Plat Tegak Dengan Suhu Permukaan Malar. *Sains Malaysiana*. 39(6): 1035–1039.
- Ishak, A. & Nazar, R. 2009. Stagnation Point Flow Over a Stretching Permeable Sheet in a Micropolar Fluid. *Journal of Quality Measurement and Analysis*. 5(1): 45-50.
- Ji, Y. C. & Fenton, F. H. 2016. Numerical Solutions of Reaction-Diffusion Equations: Application to Neural and Cardiac Models. *American Journal of Physics*. 84(8): 626–638.
- Karunanithi, S., Gajalakshmi, N., Malarvizhi, M. & Saileshwari. M. 2018. A Study on Comparison of Jacobi, Gauss-Seidel and Sor Methods for the Solution in System of Linear Equations. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*. 56(4): 214-222.
- Kuttler, C. 2017. Reaction-Diffusion Equations and Their Application on Bacterial Communication. *Handbook of Statistics*. 37: 55-91.

- Kaya, B. & Gharehbaghi, A. 2014. Implicit Solutions of Advection Diffusion Equation by Various Numerical Methods. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*. 8(1): 381–391.
- Kosov, A. A. & Semenov, E. I. 2018. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of Reaction-Diffusion Equations. *Differential Equations*. 54(1): 106–120.
- Kumar, S. & Singh, R. 2011. A Mathematical Model to Solve Reaction Diffusion Equation Using Homotopy Perturbation Method and Adomain Decomposition Method. *VSRD Technical & Non-Technical Journal*. 2(4): 186–201.
- Lakshmi, R. & Muthuselvi, M. 2013. Numerical Solution for Boundary Value Problem Using Finite Difference Method. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. 2(10): 5305-5313.
- Le Roux, A. Y. & Le Roux, M. N. 2005. Numerical Solution of a Nonlinear Reaction Diffusion Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 173(2): 211–237.
- Li, C. & Zeng, F. 2012. Finite Difference Methods for Fractional Differential Equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 22(04): 1230014.
- Liao, W., Deghan, M. & Mohebbi, A. 2009. Direct Numerical Method for an Inverse Problem of a Parabolic Partial Differential Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 232: 351-360.
- Malvern D. 2000. *Mathematical Models in Science*. In: Gilbert J.K., Boulter C.J. (eds) *Developing Models in Science Education*. Dordrecht: Springer.
- Madureira, A. L. 2017. *Numerical Methods and Analysis of Multiscale Problems*. Briefs in Mathematics, Springer.
- Muhiddin, F. A. & Sulaiman, J. 2017. Fourth-Order Numerical Solutions of Diffusion Equation by Using SOR Method with Crank-Nicolson Approach. *Journal of Physics: Conference Series*. 890: 012065.
- Mohammed, F. D. & Rivaie, M. 2017. Jacobi-Davidson, Gauss - Seidel and Successive Over Relaxation for Solving Systems of Linear Equations. *Applied Mathematics and Computational Intelligence*. 6: 41–52.
- Mohebbi, A. & Dehghan, M. 2010. High-Order Compact Solution of the One-Dimensional Heat and Advection-Diffusioan Equations. *Applied Mathematics Modelling*. 34: 3071-3084.
- Molenkamp, C. R. 1968. Accuracy of Finite-Difference Methods Applied to the Advection Equation. *Journal of Applied Meteorology*. 7: 160–167.
- Muhiddin, F. A., Sulaiman. J. & Sunarto, A. 2020. *Implementation of the 4EGKSOR for Solving One-Dimensional Time-Fractional Parabolic Equations with Grünwald Implicit Difference Scheme*. In: Alfred R., Lim Y., Haviluddin

H., On C. (eds) Computational Science and Technology. Lecture Notes in Electrical Engineering. Singapore: Springer.

Muthuvalu, M. S. & Sulaiman, J. 2011. Numerical Solution of Second Kind Linear Fredholm Integral Equations Using QSGS Iterative Method with High-Order Newton-Cotes Quadrature Schemes. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 5(1): 85–100.

Muthuvalu, M. S., Aruchunan, E., Sulaiman, J., Karim, S. A. A. & Rashidi, M. M. 2013. The 2-Point Explicit Group Successive Over-Relaxation Method for Solving Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Applied Numerical Mathematics and Scientific Computation*. 67-70.

Mutlag, A. A., Uddin, M. J & Ismail. A. I. M. 2014. Scaling Transformation for Free Convection Flow of a Micropolar Fluid Along a Moving Vertical Plate in a Porous Medium with Velocity and Thermal Slip Boundary Conditions. *Sains Malaysiana*. 43(8): 1249–1257.

Neimark, J. I. 2003. *Mathematical Models in Natural Science and Engineering*. Berlin: Springer.

Noye, B. J. 1990. A New Third-Order Finite-Difference Method for Transient One-Dimensional Advection-Diffusion. *Communications in Applied Numerical Methods*. 6: 279–288.

Onarcan, A. T., Adar, N., & Dag, İ. 2017. Numerical Solutions of Reaction-Diffusion Equation Systems with Trigonometric Quintic B-spline Collocation Algorithm. *International Conference on Applied Mathematics and Analysis*. 1-20.

Othman, M. & Abdullah, A. R. 2000. An Efficient Parallel Quarter-Sweep Point Iterative Algorithm for Solving Poisson Equation on SMP Parallel Computer. *Pertanika Journal of Science and Technology*. 8(2): 161-174.

Othman, M. & Abdullah, A. R. 1998. The Half-Sweep Multigrid Methods as a Fast Multigrid Poisson Solver. *International Journal Computational Mathematics*. 69: 219-229.

Patil, P. B. & Verma, U. P. 2009. *Numerical computational methods*. Revised edition. Oxford: Alpha Science International Ltd.

Pao, C. V. 2001. Numerical Solutions of Reaction-Diffusion Equations with Nonlocal Boundary Conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 136(1-2): 227–243.

Quarteroni, A. 2009. Mathematical Models in Science and Engineering. *Notices of the AMS*. 56(1): 10-19.

Rice, B. J. & Strange., J. D. 1994. *Ordinary Differential Equation: With Application*. 3<sup>rd</sup> ed. California: Brooks/Cole Publishing Company.

- Sakai, K., & Kimura, I. 2005. A Numerical Scheme Based on a Solution of Nonlinear Advection-Diffusion Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 173(1): 39–55.
- Saudi, A. & Sulaiman, J. 2010. Robot Path Planning based on Four Point-EGSOR Iterative Method. *Proceeding of the Conference on Robotics Automation and Mechatronics*. 476-481.
- Saudi, A & Sulaiman, J. 2009. Path Planning for Mobile Robot with Half-Sweep Successive Over-Relaxation (HSSOR) Iterative Method. *Proceedings of the Symposium on Progress in Information and Communication Technology*. 57-62.
- Saudi, A. & Sulaiman, J. 2012. Laplacian Behaviour-Based Control (LBBC) for The Path Planning of Mobile Robot Via Four Point-EGSOR. *International Journal of Computer and Information Technology*. 1(2): 81-87.
- Schlichting, H. 1979. *Boundary Layer Theory*. 7<sup>th</sup> ed. New York: McGraw-Hill.
- Singh, K. M. & Tanaka M. 2000. On Exponential Variable Transformation Based Boundary Element Formulation for Advection-Diffusion Problems. *Engineering Analysis with Boundary Element*. 24: 225-35.
- Soid, S. K., Ishak, A. & Ioan Pop. 2018. MHD Stagnation-Point Flow Over a Stretching/Shrinking Sheet in a Micropolar Fluid with a Slip Boundary. *Sains Malaysiana*. 47(11): 2907–2916.
- Spalding, D. B. 1972. A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. *International Journal of Numerical Methods Engineering*. 4: 551–559.
- Sulaiman, J. & Abdullah, A. R. 1998. Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Dengan Penghampiran Beza Terhingga Peringkat Tinggi Bagi Persamaan Poisson. *Matematika*. 14: 27-37.
- Sulaiman, J., Othman, M. & Abdullah, A. R. 1998. Skema Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai bagi Persamaan Resapan Satu Matra. *Borneo Science*. 4: 57-66.
- Sulaiman, J., Othman, M. & Hasan, M. K. 2004. Quarter-Sweep Iterative Alternating Decomposition Explicit Algorithm Applied to Diffusion Equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 81(12): 1559-1565.
- Sulaiman, J., Othman, M. & Hasan, M. K. 2007. Red-Black Half-Sweep iterative method using triangle finite element approximation for 2D Poisson equations. *Lectures Notes in Computer Science*. 4487: 326-333.
- Sulaiman, J., Hasan, M.K., Othman, M. & Yaacob, Z. 2009a. Quarter-Sweep Arithmetic Mean Iterative Algorithm to Solve Fourth-Order Parabolic Equations. *Proceedings of the International Conference on Electrical Engineering and Informatics*. 194-198.

- Sulaiman, J., Othman, M. & Hasan, M. K. 2009b. A New Quarter Sweep Arithmetic Mean (QSAM) Method to Solve Diffusion Equations. *Chamchuri Journal of Mathematics*. 1(2): 93-103.
- Sulaiman, J., Hasan, M. K., Othman M. & Karim, S. A. A. 2010. Fourth-Order QSMOR Iterative Method for the Solution of One-Dimensional Parabolic PDE's. *Proceedings of the International Conference on Industrial and Applied Mathematics*. 34-39.
- Sunarto, A., Sulaiman, J. & Saudi, A. 2014. Full-Sweep SOR Iterative Method to Solve Space-Fractional Diffusion Equations. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*. 8(24): 153–158.
- Tsedendorj, G., & Isshiki, H. 2017. Numerical Solution of Two-Dimensional Advection–Diffusion Equation Using Generalized Integral Representation Method. *International Journal of Computational Methods*. 14(1): 1750028.
- Wazwaz, A. M. 2004. A Sine-Cosine Method for Handling Nonlinear Wave Equations. *Mathematical and Computer Modelling*. 40: 499-508.
- Watkins, D. S. 2002. *Fundamental of Matrix Computations*. 2<sup>nd</sup> ed. Canada: Wiley-Interscience.
- Wilkinson, B. & Allen, M. 1999. *Parallel Programming: Technique and Applications using Networked Workstations and Parallel Computers*. New Jersey: Prentice Hall.
- Young, D. M. 1970. Convergence Properties of the Symmetric and Unsymmetric Successive Overrelaxation Method and Related Methods. *Mathematics Computations*. 24: 793–807.
- Young, D. M. 1971. *Iterative Solution of Large Linear System*. New York: Academic Press.
- Young, D. M. 1972. Second-Degree Iterative Methods for the Solution of Large Linear Systems. *Journal of Approximation Theory*. 5: 37-148.
- Young, D. M. 1976. *Iterative Solution of Linear Systems Arising from Finite Element Techniques*. In: Whiteman, J.R. (Eds.). *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*: 439-464. London: Academic Press.
- Yadav, A. S. & Kumar, A. 2017. Numerical Solution of System of Linear Equations by Iterative Methods. *International Journal of Engineering Sciences & Research Technology*. 6(4): 203-208.
- Xu, Y. 2019. Similarity Solution and Heat Transfer Characteristics for a Class of Nonlinear Convection-Diffusion Equation with Initial Value Conditions. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019: 3467276.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 3<sup>rd</sup> ed. John Willey and Sons.

Zill, D. G. & Cullen, M. R. 2005. *Differential Equation: with Boundary-Value Problems*. 6<sup>th</sup> ed. Belmont, Thomson Brook/Cole.

Zlatev, Z., Berkowicz, R. & Prahm, L. P. 1984. Implementation of a Variable Stepsize Variable Formula Method in The Time Integration Part of a Code for Treatment of Long-Range Transport of Air Pollutants. *Journal of Computational Physics*. 55(2): 278–301.

Zerroukat, M., Djidjel, K. & Charafi, A. 2000. Explicit and Implicit Meshless Methods for Linear Advection-Diffusion-Type Partial Differential Equations. *International Journal of Numerical Methods Engineering*. 48: 19–35.