PENYELESAIAN KOLOKASI CEBIS DEMI CEBIS DENGAN SKEMA KUADRATUR PERINGKAT TINGGI KE ATAS PERSAMAAN KAMIRAN FREDHOLM JENIS II MENERUSI FAMILI LELARAN SAPUAN SUKU

NOR SYAHIDA BINTI MOHAMAD

TESIS INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH SARJANA SAINS

FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

2019

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS

JUDUL: **PENYELESAIAN KOLOKASI CEBIS DEMI CEBIS DENGAN SKEMA KUADRATUR PERINGKAT TINGGI KE ATAS PERSAMAAN KAMIRAN FREDHOLM JENIS II MENERUSI FAMILI LELARAN SAPUAN SUKU**

IJAZAH: **SARJANA SAINS (MATEMATIK)**

Saya **NOR SYAHIDA BINTI MOHAMAD**, Sesi **2018-2019**, mengaku membenarkan tesis Sarjana ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis ini adalah hak milik Universiti Malaysia Sabah
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/):

☐	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA 1972)
☐	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
☑	TIDAK TERHAD	

Disahkan Oleh,

NORAZLYNNE MOHD. JOHAN @ JACKLYNE
PUSTAKAWAN
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

NOR SYAHIDA MOHAMAD
MS1721038T

(Tandatangan Pustakawan)

Tarikh : 20 September 2019

(Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman)
Penyelia

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

13 September 2019

NOR SYAHIDA BINTI MOHAMAD

MS1721038T

PENGESAHAN

NAMA : **NOR SYAHIDA BINTI MOHAMAD**

NO MATRIKS : **MS1721038T**

TAJUK : **PENYELESAIAN KOLOKASI CEBIS DEMI CEBIS DENGAN SKEMA KUADRATUR PERINGKAT TINGGI KE ATAS PERSAMAAN KAMIRAN FREDHOLM JENIS II MENERUSI FAMILI LELARAN SAPUAN SUKU**

IJAZAH : **SARJANA SAINS (MATEMATIK DENGAN EKONOMI)**

TARIKH VIVA : **28 OGOS 2019**

DISAHKAN OLEH:

PENYELIA

Tandatangan

Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman

PENGHARGAAN

Syukur kehadrat Allah S.W.T atas segala nikmat ilmu, rezeki dan nikmat yang telah diberikan untuk menyiapkan tesis ini dengan jayanya.

Saya ingin mengambil kesempatan untuk mengucapkan ribuan terima kasih pada penyelia saya sepanjang tempoh penyelidikan iaitu Prof. Madya Dr. Jumat bin Sulaiman atas segala tunjuk ajar dalam menyiapkan tesis ini. Tidak lupa pada masa yang telah diluangkan pada saya dalam memberikan pelbagai idea dalam menerbitkan keseluruhan tesis ini.

Setinggi-tinggi penghargaan juga diucapkan kepada keluarga saya terutama ibu saya Besah binti Mat Amin dan juga kakak dan abang saya dalam membantu memudahkan segala urusan sepanjang proses penyelidikan saya. Tidak lupa juga pada kawan baik saya iaitu Jocelyn Joseph yang sering memberikan motivasi dalam menyiapkan kerja penyelidikan ini. Bukan itu sahaja, ribuan terima kasih juga diucapkan pada rakan seperjuangan iaitu Nur Afza Mat Ali atas dorongan dan bantuan yang sering diberikan.

Seterusnya, ucapan terima kasih buat semua pensyarah Universiti Malaysia Sabah dan rakan-rakan seperjuangan lain atas segala bantuan dan tunjuk ajar yang telah dicurahkan.

Nor Syahida binti Mohamad

12 September 2019

ABSTRAK

Persamaan kamiran banyak digunakan di dalam pemerihalan fenomena terutamanya dalam bidang kejuruteraan, kimia, biologi, matematik dan fizik. Ia juga telah digunakan secara meluas oleh penyelidik dunia memandangkan persamaan kamiran ini telah diperkenalkan pada awal abad ke Sembilan belas. Di samping itu, pelbagai kajian telah difokuskan oleh para penyelidik untuk mengupas khususnya tentang penyelesaian ke atas jenis persamaan kamiran dan kaedah berangka yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan kamiran tersebut. Memandangkan persamaan penyelesaian persamaan kamiran Fredholm salah satu topik utama yang seringkali dibincangkan, maka kajian ini cuba mengusulkan penyelesaian kolokasi malar cebis demi cebis ke atas persamaan kamiran Fredholm linear jenis kedua dengan inti kernelnya adalah bersifat licin. Hakikatnya, penyelesaian hampiran ini hanya membabitkan penggunaan skema pendiskretan kolokasi, perumusan penghampiran polinomial malar cebis demi cebis dan pengaplikasi skema kuadratur khususnya peringkat pertama, Trapezium dan peringkat ke empat Boole. Kombinasi ketiga-tiga pendekatan ini dalam proses pendiskretan ke atas permasalahan yang dipertimbangkan dapat membentuk persamaan penghampiran cebis demi cebis sapuan penuh, separuh dan suku. Ketiga-tiga persamaan penghampiran tersebut pula digunakan untuk menjana sistem persamaan linear yang sepadan. Untuk mendapatkan penyelesaian hampiran tersebut, tiga famili kaedah lelaran telah dipertimbangkan iaitu famili kaedah lelaran Jacobi Gauss-Seidel (GS) dan juga pengenduran berlebihan berturut-turut (SOR) digunakan untuk menyelesaikan sistem linear tersebut. Bagi mengilustrasikan perbandingan ketiga-tiga famili kaedah lelaran tersebut, beberapa contoh telah diujikaji untuk menilai keefisienan kesemua famili kaedah yang telah dikemukakan dengan menetapkan kaedah lelaran Jacobi Sapuan Penuh (FSJ) sebagai kaedah kawalan. Keefisienan ketiga-tiga famili lelaran tersebut dapat dinilai menerusi perbandingan tiga parameter iaitu pada bilangan lelaran, masa lelaran dan juga ralat maksima. Berdasarkan keputusan kajian berangka yang diperolehi, kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Suku (QSSOR) menunjukkan keefisienan yang lebih baik berbanding famili lelaran GS dan Jacobi.

ABSTRACT

SOLVING PIECEWISE CONSTANT POLYNOMIAL COLLOCATION METHOD OF HIGH ORDER QUADRATURE IN SOLVING THE FREDHOLM INTEGRAL EQUATION TYPE II VIA ITERATIVE QUARTER-SWEEP FAMILY

The integral equation has been used in most versatile areas of study such as in engineering, chemistry, biology, mathematics and physics. It was widely used by the researchers since it has been introduced in early of the nineteenth century. Besides that, there are various types of studies that have been carried out by the researcher in solving the integral equations with several types of integral equations. Since the topic was highlighted on the Fredholm integral equations of second kind of smooth kernel with the piecewise polynomial constant collocation method, these Fredholm integral equations was involved with the collocation discretization method, approximate equation of piecewise polynomial constant and the application of the first-order quadrature scheme, Trapezium's rule and fourth-order quadrature scheme, Boole's rule. These three combinations of discretization have formed the approximation solution respectively for full-, half-, and quarter-sweep cases. Those three approximate equations have generated the corresponding linear system. There are three types of iterative methods that were introduced as to generate those linear systems which are Gauss-Seidel (GS), Successive over Relaxation method (SOR) and Jacobi method. In order to illustrate the comparison of those iterative methods, we have brought three examples to test the efficiency of the iterative methods and set aside the Full-Sweep Jacobi of iterative method (FSJ) as a control method. We had emphasized on the parameter of number of iteration, execution time and maximum absolute error as comparative subjects. Based on the computational results, it's clearly showed that the efficiency of the SOR Quarter-Sweep method is better than the GS method and Jacobi method.

ISI KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

Muka Surat

SENARAI RAJAH

Muka Surat

SENARAI ALGORITMA

Muka Surat

SENARAI SIMBOL

$-$	- Penolakan
$+$	- Penambahan
$\times$	- Pendaraban
$\leq$	- lebih kecil daripada atau sama dengan
β	- Beta
$\geq$	- lebih kecil daripada atau sama dengan
α	- Alfa
ξ	- Xi
ε	- Epsilon
ω	- Parameter pengenduran
$\lvert\;\rvert$	- dasar duaan
$\int$	- Kamiran

SENARAI ISTILAH

GS	Kaedah lelaran Gauss-Seidel	Gauss-seidel Iterative Method
FSGS	Kaedah lelaran Gauss-Seidel bagi kes sapuan penuh	Gauss-Seidel Iterative Method For Full-Sweep
HSGS	Kaedah lelaran Gauss-Seidel bagi kes sapuan separuh	Gauss-Seidel Iterative Method For Half-Sweep
QSGS	Kaedah lelaran Gauss-Seidel bagi kes sapuan suku	Gauss-Seidel Iterative Method For Quarter-Sweep
SOR	Kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut	Successive Over Relaxation Iterative Method
FSSOR	Kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut kes sapuan penuh	Successive Over Relaxation Iterative Method For Full-Sweep
HSSOR	Kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut kes sapuan separuh	Successive Over Relaxation Iterative Method For Half-Sweep
QSSOR	Kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut kes sapuan suku	Successive Over Relaxation Iterative Method For Quarter-Sweep
FSJ	Kaedah lelaran Jacobi kes sapuan penuh	Jacobi Iterative Method For Full-Sweep
HSJ	Kaedah lelaran Jacobi kes sapuan separuh	Jacobi Iterative Method For Half-Sweep
QSJ	Kaedah lelaran Jacobi kes sapuan suku	Jacobi Iterative Method For Quarter-Sweep
ADM	Penguraian Adomian	Adomian Decompose Method
RBGS	Rawakan blok Gauss-Seidel	Randomized Block Gauss-Seidel Method
RGS	Rawakan Gauss-Seidel	Randomized Gauss-Seidel Method
AM	Min Aritmetik	Arithmetic Mean

HPM	Kaedah usikan Homotopi	Homotopy Perturbation Method
CNN	Rangkaian Pengkonvolutan Saraf	Convolutional Neural Network
FSAM	Kaedah Aritmetik Min kes sapuan penuh	Arithmetic Mean Iterative Method For Full -Sweep
HSAM	Kaedah Aritmetik Min kes sapuan separuh	Arithmetic Mean Iterative Method For Half-Sweep
HSGM	Kaedah Geometrik Min kes sapuan separuh	Geometric Mean Iterative Method For Half-Sweep
FSGM	Kaedah Geometrik Min kes sapuan penuh	Geometric Mean Iterative Method For Full-Sweep

SENARAI LAMPIRAN

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Dalam dunia penyelidikan matematik, fungsi persamaan kamiran merupakan salah satu fungsi yang tidak asing sejak dahulu lagi iaitu bermula pada awal dekad ke-19 (Stark & Niethammer 1991). Ini adalah kerana, konsep kamiran ini adalah mudah dan sering digunakan dalam bidang matematik terutama dalam mencari nilai sesaran, luas dan isipadu sesuatu objek (Sauerheber, 2011).

Konsep kamiran ini digunakan secara meluas dalam bidang Matematik, kejuruteraan, fizik dan biologi memandangkan ia banyak digunakan dalam menyelesaikan pelbagai permasalahan dalam sesuatu bidang. Bukan itu sahaja, persamaan kamiran ini seringkali diaplikasikan dalam pelbagai bidang dalam penyelidikan saintifik. Antara bidang yang terlibat dengan persamaan kamiran ini adalah Mekanik kuantum, teori keupayaan gas, fenomena turun-temurun dalam fizik dan biologi, teori pemulihan, sinaran, pengoptimumam, teori komunikasi, Matematik ekonomi, populasi genetik, perubatan dan banyak lagi (Ray & Sahu, 2013).

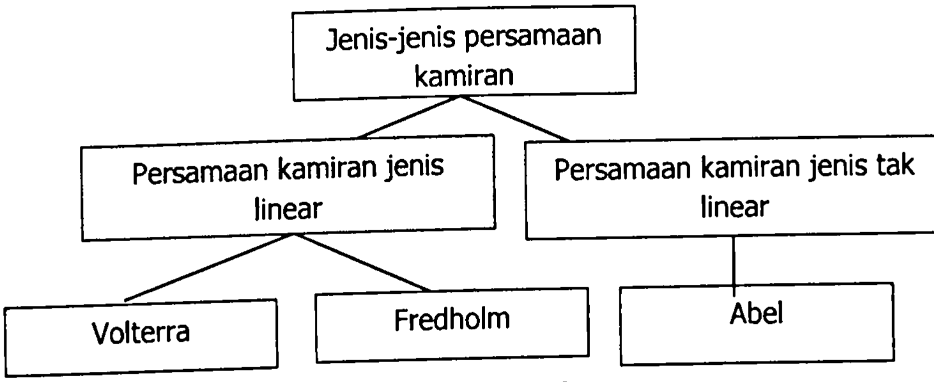
Persamaan kamiran ini sering melibatkan pengoperasi penyelesaian persamaan kamiran dalam sesuatu bidang Saintik dengan mengambil kira keefisienan penyelesaian hampiran tersebut. Menurut Atkinson dan Shampine (2007), penyelesaian hampiran tersebut dapat diperolehi melalui pendiskretan sesuatu persamaan kamiran tentu dengan mempertimbangkan dengan beberapa kaedah yang sesuai dan kemudiannya kaedah terus atau kaedah lelaran digunakan ke atas sistem persamaan penghampiran kamiran yang digunakan. Hasil ujikaji berangka tersebut cuba dinilai dengan beberapa parameter pengukur yang sesuai seperti bilangan lelaran, masa lelaran dan juga ralat maksimum (Muthuvalu & Sulaiman, 2010).

Di samping itu, persamaan kamiran terdiri daripada dua jenis iaitu persamaan kamiran linear dan tak linear. Seperkara lagi, persamaan kamiran ini kebiasaannya muncul pada persamaan kamiran Fredholm, Volterra, Volterra-Fredholm, Volterra-integro (Atkinson & Shampine , 2007; Song & Kim 2014; Gachpazan *et al.,* 2014; Ibrahim *et al.,* 2016).

1.2 Pengenalan Jenis-jenis Persamaan Kamiran

Berdasarkan pada kajian terdahulu, terdapat beberapa jenis persamaan kamiran yang telah diperkenalkan. Terlebih dahulu perlu diketahui bahawa persamaan kamiran tersebut terbahagi kepada dua iaitu persamaan kamiran linear dan persamaan kamiran tak linear. Lazimnya, persamaan linear dan tak linear banyak digunakan dalam kajian lepas seperti dalam kajian Zhang *et al.,* (2014), Marsh & Wadsworth (1976), Avazzadeh *et al.,* (2013), Alturk (2016), Md & Md, (2017) dan banyak lagi. Namun begitu, dalam kajian ini hanya membincangkan dengan lebih terperinci pada persamaan linear sahaja.

Hasil daripada penjelasan di atas, ilustrasi jenis-jenis persamaan dapat dilihat pada Rajah 1.1 dengan hanya memfokuskan pada persamaan kamiran jenis linear sahaja. Seksyen seterusnya cuba membincangkan dengan lebih teliti berkenaan konsep persamaan linear tersebut.



Rajah 1.1: Jenis-jenis Persamaan Kamiran

1.3 Persamaan Kamiran Linear

Seksyen ini cuba menghuraikan dengan lebih terperinci berkenaan dengan persamaan kamiran linear. Berdasarkan kajian Md dan Md (2017), bagi mengenal pasti sesuatu kamiran adalah linear, fungsi kamiran tersebut perlu dihindari daripada sebarang kuasa lebih daripada satu. Sebarang fungsi persamaan kamiran yang mempunyai kuasa lebih dari satu adalah jenis persamaan kamiran tak linear (Md & Md, 2017).

Bagi memudahkan kefahaman terhadap sesuatu fungsi persamaan kamiran Fredholm linear, berikut merupakan perbincangan persamaan linear dengan mengandaikan persamaan kamiran (1.1) dipermudahkan dalam bentuk persamaan (1.2).

$$g(x) = U(x) + \lambda \int_a^b K(s,t)U(t)dt \ x\epsilon[a,b] \tag{1.1}$$

dengan $K(s,t)$ adalah fungsi kernel dan $U(x)$adalah fungsi tak diketahui bersama dengan had kamiran a dan b. Manakala $g(x)$ merupakan fungsi diketahui dan λ adalah melibatkan nombor nyata (Ray & Sahu, 2013). Menurut Avazzadeh *et.al*, (2011) dan Muftahov *et al.,* (2015) perbezaan di antara persamaan kamiran Fredholm dan Volterra adalah pada had kamiran tersebut yang mana had kamiran bagi persamaan kamiran Fredholm adalah bersifat pemalar bagi kedua-dua had kamiran atas dan bawah. $g(x) = U(x) + \lambda\kappa U(t) \quad \kappa = K(s,t)dt$

$$g(x) = U(x) + \lambda\kappa U(t) \tag{1.2}$$

dengan

$\kappa = K(s,t)dt$

Jelas bahawa persamaan kamiran itu adalah linear jika kuasa kamiran tersebut menepati syarat seperti berikut:

$$\kappa\{\lambda_1 U_1(t) + \lambda_2 U_2(t)\} = \kappa\lambda_1 U_1(t) + \kappa\lambda_2 U_2(t) \tag{1.3}$$

Persamaan (1.3) menunjukkan bahawa fungsi persamaan adalah bersifat linear dan persamaan kamiran jenis linear. Bagi mengukuhkan lagi kefahaman terhadap persamaan linear, berikut merupakan contoh-contoh persamaan linear:

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{1.4}$$

$$y(x) = x + \int_a^b (4xt - x^2)y(t)dt \tag{1.5}$$

$$y(x) = x^6 - 5x^3 + x + 10 + \int_a^b (x^2 + t^2)y(t)dt \tag{1.6}$$

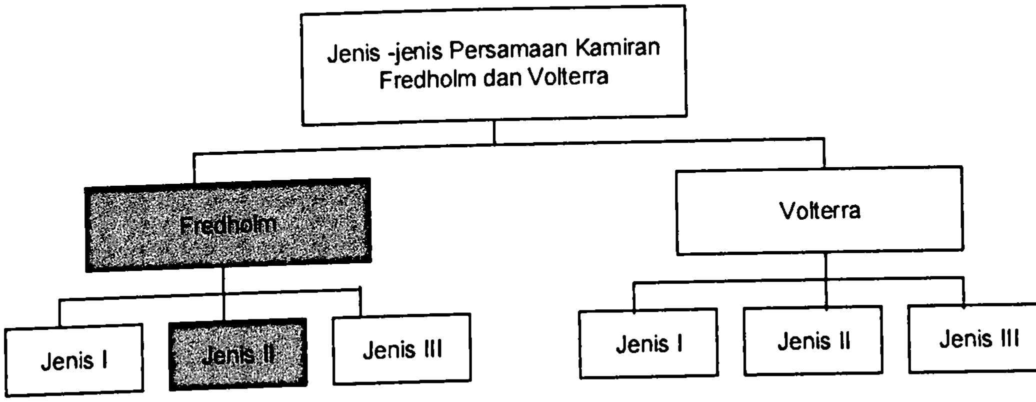
Walaubagaimanapun, konsep linear dan tak linear bagi pelbagai jenis persamaan kamiran adalah sama seperti dijelaskan dalam perbincangan sebelum ini dan persamaan kamiran ini sering wujud dalam bentuk persamaan Fredholm dan Volterra (Kumar *et al.*, 2017; Babolian & Shambloo, 2011).

1.4 Sistem Persamaan Kamiran Linear

Hasil daripada kajian lepas, persamaan kamiran linear digunakan untuk mencari penyelesaian analitik dan penyelesaian berangka. Antara jenis persamaan kamiran yang sering didiskretasikan adalah persamaan kamiran jenis linear Fredholm dan persamaan jenis linear Volterra. Rumus persamaan umum bagi persamaan kamiran adalah pada persamaan (1.1). Bagi persamaan kamiran Volterra pula, had kamiran adalah perlu bersifat pembolehubah bagi salah satu had kamiran itu sendiri

$$g(x) = U(x) + \lambda \int_a^x K(s,t)U(t)dt \tag{1.7}$$

Kedua-dua persamaan kamiran Fredholm dan Volterra ini adalah persamaan yang kerap digunakan dalam mencari penyelesaian berangka mengikut kaedah-kaedah pendiskretan dan kaedah terus atau lelaran yang sesuai. Bukan itu sahaja, kedua-dua persamaan ini juga hadir dalam tiga jenis persamaan iaitu persamaan kamiran jenis I, II dan III (Joe, 1984; Shulaila, 1997; Kumar *et al.*, 2017), lihat Rajah 1.2.



Rajah 1.2: Jenis-jenis Persamaan Kamiran Fredholm dan Volterra Linear

1.5 Persamaan Kamiran Fredholm Linear

Oleh kerana kajian ini memfokuskan pada penggunaan persamaan kamiran Fredholm maka seksyen ini cuba membahaskan tentang pengenalan terhadap persamaan kamiran Fredholm jenis linear ini. Persamaan kamiran Fredholm linear terdiri daripada beberapa jenis iaitu persamaan kamiran jenis I, II, dan III. Setiap jenis persamaan kamiran Fredholm ini mempunyai ciri-ciri yang tersendiri.

Persamaan kamiran Fredholm merupakan salah satu persamaan kamiran yang popular dalam kalangan ahli penyelidik matematik, oleh kerana persamaan kamiran tersebut mempunyai beberapa jenis inti Kernel iaitu inti Kernel bersifat licin, potential, Hankel (Whaphare, 2015; Babolian & Shambloo, 2010; Abdou & El-Bary , 2000), Berdasarkan kajian lepas, terdapat banyak penyelidik telah membuat kajian ke atas persamaan kamiran Fredholm pada jenis Kernel seperti yang berikut. Hal ini cuba dibincangkan lagi pada bab seterusnya dalam soroton literatur. Berdasarkan kajian lepas, persamaan kamiran Fredholm juga terdiri daripada persamaan linear dan juga tak linear (Alturk, 2016; Avazzadeh *et al.*, 2011). Walau bagaimanpun, kajian ini hanya akan memfokuskan pada persamaan kamiran jenis linear sahaja dan cuba dibincangkan pada seksyen seterusnya.

RUJUKAN

Abdullah, A. R. 1991. The Four Point Explicit Decoupled Group (EDG) Method: A Fast Poisson Solver. *Intrrnational Journal of Computer Mathematics,* **38**: 61-70.

Abdullah, A. R. & Othman, M. 2000. An Efficient Parallel Quarter-Sweep Point Iterative Algorithm for Solving Poisson Equation on SMP parallel Computer, 8(2): 161-174.

Alpert, B. K. 1999. Hbyrid Gauss-Trapezoidal Quadrature Rules. *Siam Journal Science of Computation*, 20(5):1551-1584.

Abdou, M. A. & El-Bary A. A. 2000. Fredholm-Volterra Integral Equation with Potential Kernel, 26(6): 321-330.

Alketaby, K., Ahmady, S., Ahmady, N. & Allahviranloo E. 2006. Block-Jacobi Two-Stage Method with Gauss-Seidel Inner Iteration for Fuzzy System of Linear Equations, *Applied Mathematics and Computatio,* 174: 1217-1228.

Atkinson, K. E. & Shampine, L. F. 2007. Solving Fredholm Intgeral Equations Of The Second Kind In Matlab.

Avazzadeh, Z., Heydari, M. & Loghmani, G. B. 2011. Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of Second Kind by Using Integral Mean Value Theorem. *Applied Mathematical Modelling,* **35**: 2375-2383.

Avazzadeh, Z., Heydari, M. & Loghmani, G. B. 2013. Numerical Solution of Fredholm Integral Equation of Second Kind by Using Integral Mean value Theorem. High Dimensional Problems *Applied Mathematical Modelling,* **37**: 432-442.

Babolian, E. & Shambloo, A. S. 2008. Numerical Solution of Volterra Integral and Integro-differential Equations of Convolusion Type by Using Operational Matrices of Piecewise Constant Orthogonal Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 214: 495-508.

Babolian, E. & Hajikandi, A. A. 2010. The Approximate Solution of Class of Fredholm Integral Equations with Weakly Singular Kernel, 235: 1148-1159.

Cheng, B., nd, Systems Of Linear Equations: 1-20.

Chakrabarti, A. & Martha, S. C. 2009. Approximate solutions of Fredholm Integral Equations of The Second Kind. *Applied Mathematics and Computation,* 211: 459-466.

Eggert, N. & Lund, J. 1989. The Trapezoidal Rule for Analytic Functions of Rapid Decrease. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 27: 389-406.

Evans, D. J. 1991. Improving SOR Method. *International Journal Computer Mathematics*, 54:207-213.

Golub, G. H. & Welsch, J. H. 1968. Calcualtion of Gauss Quadrature Rules. Present address:Hewlett-Packerd Company, Palo Alto, California.

Gachpazan, M., Keraychian, A. & Zeidabadi, H. 2014. Finite Element Method for Solving linear Volterra Integra-Differential equations of the Second Kind. *Journal of Information and Computing Science*, 9(4): 289-297.

Gharib, S., Ali, S. R., Khan, R., Munir, N. & Khanam, M. 2015 System of Linear Equations, Gaussian Elimination 15(5): 1-5.

HarpinderKaur & KhushpreetKaur. 2012. Convergence of Jacobi and Gauss-Seidel Method and Error Reduction Factor. *IOSR Journal of Mathematics*, 2(2): 20-23.

Ibrahim, H., Attah, F. & Gyegwe, G. T. 2016. On the Solution of Volterra-Fredholm and Mixed volterra-Fredholm Integral equations Using the New Iterative Method. *Applied Mathematics*, 6(1):1-5.

Joe, S. 1984. Collocation Methods Using Piecewise Polynomials For Second Kind Integral Equations : 391-400.

Joe, S. 1987. Discrete Galerkin Methods for Fredholm Intgeral Equations of The Second kind. *Journal of Numerical Analysis*, 7: 149-164.

Johnson, S. G. 2010. Notes On The Convergence of Trapezoidal-Rule Quadrature.

Jamei, M. S. 2015. Unified Error Bounds of All Newton-Cotes Quadrature-Rules. *Journal Numerical Mathematics*, 23(1):67-80.

Kumar, J., Manchanda P. & Pooja. 2017. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind using legendre wavelet collocation method. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 117(1): 33-43.

Li, C. X., Wu, S. H. & Guo P. 2019. On the SOR-like iteration method for solving absolute value equations. *Applied Mathematics*, 97: 107-113.

Marsh, T. & Wadsworth, M. 1976. An Iterative Method for The Solutions of Fredholm Integral Equations of The Second Kind. Journal Institutes Mathematics Applications 18: 57-65.

Muthuvalu, M. S. & Sulaiman, J. 2009. Half-Sweep Arihmetic Mean Method with High-Order Newton-Cotes Quadrature Schemes to Solve Linear Second Kind Fredholm Equations. *Journal of Fundamental Sciences*, 5: 7-16.

Maleknejad, K. & Sahlan M. N. 2010. The method of moments for solution of second kind Fredholm integral equation based on B-spline wavelets. *International Journal of Computer Mathematics*. 87(7): 1602-1616.

Mirzaee, F. & Piroozfar, S. 2011. Numerical Solution of Linear Fredholm Integral Equations via Modified Simpson's Quadrature Rule. *Journal of King Saud University,* 23: 7-10.

Muthuvalu, M. S. & Sulaiman, J. 2010. Quarter- Sweep Arithmetic Mean Method for Second kind Linear Fredholm Integral Equations. *Applied Mathematics and Computation,* 4(59): 2943-2953.

Muthuvalu, M. S. & Sulaiman, J. 2011. Half- Sweep Arithmetic Mean Method with Composite Trapezoidal Scheme for Solving Linear Fredholm Integral Equations. *Applied Mathematics and Computation,* 217:5442-5448.

Mittal, S. 2014. A Study of Successive Over-Relaxation Method Parallelization over Modern HPC Language. *International Journal High Performance Computing and Networking,* 7(4): 1-7.

Muftahov, I., Tynda, A. & Sidorov, D. 2016. Numerical Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind with Discontinuous Kernel. 00:1-12.

Md, M. H & Md, A. B. 2017. Solving nonlinear Integral Equations by using Adomian Decomposition method. *Journal of Applied and Computational Mathematics,* 6(2): 1-4.

Mesgarani, H. & Azari, Y. 2019. Numerical investigation of Fredholm integral equation of first kind with noisy data. *Mathematics Science.*

Mohammad, M. 2019. A Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind Based on Tight Framelets Generated by the Oblique Extension Principle.

O'Carroll, M. J. 1973. Inconsistencies and S.O.R Convergence for the discrete Neumann Problem. *Journal Institute Mathematics Application,* 11: 343-350.

Puig, J. P. & Ferran, R. 2010. The Block Gauss-Seidel Method In Sound Transmission Problems. *Journal of Computational Acoustic,* 18(1): 13-30.

Parandin, N. & Gholomtabar, Sh. 2010. Numerical Solution of The Linear Fredholm Integral Equation of Second Kind. *Journal of Mathematical Extension,* 5(1): 31-39.

Ray, S. R. & Sahu, P. K. 2013. Numerical Methods For Solving Fredholm Integral Equations Of Second Kind, Article ID 4269: 1-17.

Rodwellhead. Solution of Fredholm Equations by Collocation. https://www.scribd.com/document/214615700/Solution-of-Fredholm-Integral-by-Collocation, Mar. 2014.

Radzuan, N. Z. F. M., Suardi, M. N., Sulaiman, J. 2017. Ksor Iterative Method with Quadrature Scheme for Solving System of Fredholm Intgeral Equations of Second Kind. *Journal of Fundamental and Applied Science.*

Starke, G. & Niethammer, W. 1991. Linear Algebra and Its Application, SOR for AX-XB=C, 154-156: 355-375.

Shulaia, D. 1997. On One Fredholm Integral Equation of Third Kind. *Georgian Mathematical Journal*, 4(5): 461-476.

Sauerheber, R. D. 2012. Classroom Notes. *International Journal of Mathematical Education in Scinece and Technology*, 43(1): 85-143.

Shao, X. H., Ju, C., Shen, H. L & Li, C. J. 2014. Modified Iterative Method for Augmented System. *Applied Mathematics Mechanical English Education*, 35(4): 503-514.

Sunarto, A., Sulaiman, J. & Saudi, A. 2014. Full-Sweep SOR Iterative Method to Solve Space-Fractional Diffusion Equations. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 8(24):153-158.

Song, Y. & Kim H. 2014. The Solution of Volterra Integral Equation of the Second Kind by Using the Elzaki Transform. *Applied Mathematical Sciences*, 8(11): 525-530.

Smith, G. D. 1985. "Numerical solution of partial differential equations: finite difference method." Clarendon Press: Oxford.

Saha, M. 2017. Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Method for Solving non-square linear systems.

Suardi, M. N., Radzuan, M. N. Z. F. & Sulaiman, J. 2019. Performance of Quarter-Sweep SOR iteration with Cubic-B-Spline Scheme for Solving Two-Point Boundary Value Problems. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 14(3):693-700.

Tavsanoglu, V. 2006. Jacobi's iterative method for Solving Linear Equations and the Simulation of Linear CNN.*International Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications.*

Varga, R. S. 1962. "Matrix Iterative Analysis." Prentice Hall: New Jersey.

Ubale, P. V. 2012. Numerical Solution of Boole's Rule in Numerical Integration by Using General Quadrature Formula, 2: 1-4.

Waphare, B. B. 2015. Generalized Fractional Hankel Type Transform. *Caribbean Journal of Science and Technolgy*, 3: 855-863.

Wazwaz, A. M. 2011. The Regulation Method for Fredholm Integral Equations of the First Kind. *Computer and Mathematics with Applications*, 61: 2981-2986.

Wu, W. M. 2018. Convergence Of The Randomized Block Gauss-Seidel Method. University of California, Los Angeles

Young, D. 1954. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 76(1): 92-111.

Yeyios, A. K. & Psimarni, A. 1990. Convergence Analysis of The Modified SOR (MSOR) Method. *International Journal Computer Mathematics*, 35: 231-244.

Youseff, I. 2012. On the Successive Overrelaxation Method. *Journal of Mathematics and Statistics*, 8(2): 176-184.

Yang, X. & Mittal, R. 2014. Acceleration of The Jacobi Iterative Method by Factor Exceeding 100 Using Scheduled Relaxation. *Journal of Computational Physics.*

Yilman, B. & Cetin, Y. 2017. Numerical Solutions of the Fredholm Integral Equations of The Second Type, 5(3): 284-292.

Zhang, H. & Chen, Y., Nie, X. 2014. Solving the linear integral equations Based on the radial basis function interpolation. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 793582 14: 1-9.

Zafar, F., Saleem, S. & Burg, C. O. E. 2014. New Derivative based Open Newton-Cotes Quadrature Rules. Article ID:109138.