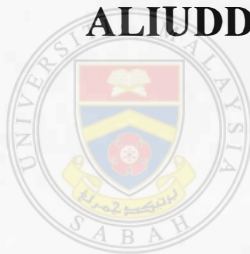


**KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT BAGI  
MENYELESAIKAN MASALAH NILAI SEMPADAN DUA  
TITIK TAK LINEAR**

**PERPUSTAKAAN  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH**



**ALIUDDIN BIN JAPARUDIN**

**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

**PROGRAM MATEMATIK DENGAN EKONOMI  
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH**

**2009**

## UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: Kaedah Keluaran Kumpulan Tak TersiratBagi Menyelesaikan Masalah Nilai SempadanIJAZAH: SARJANA MUDA SAINS MATEMATIK DENGAN  
EkonomiSAYA ALIUDIN BIN JAPARUDIN SESI PENGAJIAN: 2008/2009  
(HURUF BESAK)

mengaku membenarkan tesis (LPSM/Sarjana/Doktor Falsafah) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

SULIT

TERHAD

TIDAK TERHAD

PERPUSTAKAAN  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau Kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)

(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)

Disahkan Oleh

NURULAIN BINTI ISMAIL

LIBRARIAN

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: KAMPARIS AYARD  
84700 BONGAWAN  
SABAH

Prof Majeed-Dr Jumat Bin Sulaiman  
Nama Penyelia

Tarikh: 30 APRIL 2009Tarikh: 30 APRIL 2009

CATATAN:- \*Potong yang tidak berkenaan.

\*\*Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa /organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.

@Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

**KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT BAGI MENYELESAIKAN  
MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK TAK LINEAR**

**ALIUDDIN BIN JAPARUDIN**



**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

**DISERTASI YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN  
DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA MUDA SAINS  
DENGAN KEPUJIAN**

**PROGRAM MATEMATIK DENGAN EKONOMI  
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH**

**April 2009**

## PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

**30 April 2009**



---

ALIUDDIN BIN JAPARUDIN

HS2005-4044

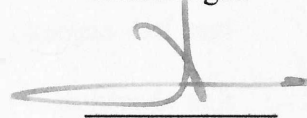


UMS  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

**PENGESAHAN****DIPERAKUKAN OLEH**

Tandatangan

1. **PENYELIA**  
**(PROF. MADYA. DR. JUMAT SULAIMAN)**

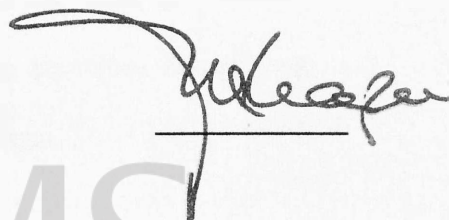


---

2. **PEMERIKSA**  
**(PN. SUZELAWATI ZENIAN)**

---

3. **DEKAN**  
**(PROF. DR. MOHD HARUN ABDULLAH)**



---



**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

## PENGHARGAAN

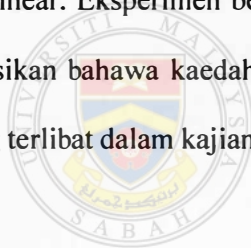
Syukur kehadiran Allah S.W.T kerana mengurniakan nikmat masa dan tenaga sehingga siapnya disertasi ini. Ribuan terima kasih juga diucapkan kepada Prof. Madya Dr Jumat Bin Sulaiman selaku penyelia saya yang banyak memberi sokongan dari segi ilmu dan motivasi sepanjang menyiapkan disertasi ini. Tidak lupa juga kepada ahli keluarga saya terutamanya ibu bapa saya kerana selama ini memberi sokongan yang tidak putus-putus serta semua pensyarah matematik terutamanya Pn Suzelawati sebagai pemeriksa disertasi ini dan rakan-rakan yang sedikit sebanyak memberi galakan dan tunjuk ajar dalam penulisan disertasi ini. Jasa ke semua kalian yang terlibat dalam menjayakan penulisan disertasi ini amatlah dihargai.



UMS  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

## ABSTRAK

Berdasarkan kajian yang lepas, famili kaedah lalaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) telah menunjukkan salah satu kaedah lalaran blok yang cekap dalam menyelesaikan mana-mana sistem persamaan linear. Justeru itu dalam disertasi ini, kecekapan kaedah lalaran 2 dan 4-Titik KTT dengan parameter berpemberat  $\omega$  menerusi kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (PBB) dikaji dalam menyelesaikan sistem persamaan tak linear yang dijana oleh skema beza terhingga peringkat kedua dan keempat. Bagi menurunkan sistem persamaan tak linear, kaedah Newton akan dikemukakan untuk melinearakan sistem persamaan tak linear kepada sistem persamaan linear. Eksperimen berangka ke atas tiga permasalahan juga diberi untuk mengilustrasikan bahawa kaedah 4-Titik KTT (PBB) adalah lebih baik berbanding kaedah yang terlibat dalam kajian ini.

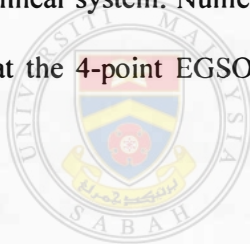


UMS  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

**Title: Explicit Group Iterative method for solving Nonlinear Two-Point boundary value problems**

**ABSTRACT**

Based on previous studies, a family of Explicit Group (EG) iterative methods has been shown to be one of the efficient block iterative methods in solving any system of linear equations. Following to that for this dissertation, the efficiency of 2 and 4-point EG with weighted parameter  $\omega$  Successive Overrelaxation (SOR) method by the second and fourth order finite difference scheme are studied. To linearize nonlinear systems, the Newton method has been proposed to transform the original system into the form of linear system. Numerical experiments of three problems are also given to illustrate that the 4-point EGSOR method is more superior compared to the tested methods.



UMS  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH



## KANDUNGAN

Muka Surat

<b>PENGAKUAN</b>	ii
<b>PENGESAHAN</b>	iii
<b>PENGHARGAAN</b>	iv
<b>ABSTRAK</b>	v
<b>ABSTRACT</b>	vi
<b>KANDUNGAN</b>	vii
<b>SENARAI JADUAL</b>	x
<b>SENARAI RAJAH</b>	xi
<b>SENARAI ISTILAH</b>	xiii
<b>BAB1</b>	<b>PENDAHULUAN</b>
1.1	PENGENALAN 1
1.2	PENGENALAN KONSEP PERSAMAAN TERBITAN 2
1.2.1	Persamaan Terbitan Biasa 3
1.2.2	Persamaan Terbitan Separa 4
1.2.3	Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Tak Linear 5
1.3	PEMERIHAN KONSEP MATEMATIK ASAS 6
1.3.1	Konsep Matriks Algebra 6
	A. Matriks Baris Dan Lajur 7
	B. Matriks Pepenjuru 8
	C. Matriks Tiga Pepenjuru 8
	D. Matriks Jacobian 9
	E. Matriks Identiti 9
	F. Matriks Segitiga Atas Dan Matriks Segitiga Bawah 10
	G. Matriks Transposisi 11
	H. Matriks Simetri 11
1.3.2	Kembangan Siri Taylor 12
1.3.3	Sistem Persamaan Linear 12

	A. Kaedah Terus	13
	B. Kaedah Lelaran	14
1.4	OBJEKTIF KAJIAN	15
1.5	SKOP KAJIAN	16
<b>BAB 2</b>	<b>ULASAN LITERATUR</b>	
2.1	PENDAHULUAN	17
2.2	KEPELBAGAIAN KAEDAH DALAM PENYELESAIAN MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK TAK LINEAR	18
2.3	PERKEMBANGAN KAEDAH-KAEDAH LELARAN	19
	2.3.1 Kaedah Lelaran Satu Langkah	19
	2.3.2 Kaedah Lelaran Dua Langkah	21
2.4	PERKEMBANGAN FAMILI KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT	22
	2.4.1 Kumpulan Tak Tersirat KTT	23
	2.4.2 Kaedah Kumpulan Tak Tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-turut KTT(PBB)	24
<b>BAB 3</b>	<b>PERUMUSAN KAEDAH BEZA TERHINGGA BAGI PERMASALAHAN KAJIAN</b>	
3.1	PENDAHULUAN	25
3.2	PENDISKRETAN DAN PERUMUSAN MASALAH	25
3.3	KAEDAH BEZA TERHINGGA	26
	3.3.1 Skema Pendiskretan Beza Terhingga	26
	3.3.2 Perumusan Persamaan Beza Terhingga	27
	A. Persamaan Penghampiran Peringkat Kedua	27
	B. Persamaan Penghampiran Peringkat Keempat	28
3.4	PENURUNAN SISTEM PERSAMAAN TAK LINEAR MENERUSI KAEDAH NEWTON	29
3.5	PERUMUSAN KAEDAH LELARAN	32
	3.5.1 Perumusan Kaedah GS	32
	3.5.2 Perumusan Kaedah PBB	35

3.5.3	Perumusan Kaedah 2 Titik-KTT(PBB)	36
3.5.4	Perumusan Kaedah 4 Titik-KTT(PBB)	39
<b>BAB 4</b>	<b>KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN</b>	
4.1	PENDAHULUAN	43
4.2	KEPUTUSAN BERANGKA	43
4.2.1	Permasalahan Pertama	45
	A. Skema Pendiskretan Peringkat Kedua	45
	B. Skema Pendiskretan Peringkat Keempat	47
4.2.2	Permasalahan Dua	49
	A. Skema Pendiskretan Peringkat Kedua	50
	B. Skema Pendiskretan Peringkat Keempat	52
4.2.3	Permasalahan Tiga	54
	A. Skema Pendiskretan Peringkat Kedua	55
	B. Skema Pendiskretan Peringkat Keempat	57
4.3	PERBINCANGAN	59
<b>BAB 5</b>	<b>KESIMPULAN DAN CADANGAN</b>	
5.1	KESIMPULAN	61
5.2	CADANGAN	62
	<b>RUJUKAN</b>	64

## SENARAI RAJAH

No. Rajah		Muka Surat
1.1	Pelbagai jenis kaedah terus	14
1.2	Pelbagai jenis kaedah lelaran	15
3.1	Rangkaian taburan titik nod dalam domain penyelesaian pada $(n+1)$ subselang	28
3.2	Carta alir aturcara pelaksanaan kaedah GS	35
3.3	Carta alir aturcara pelaksanaan kaedah 2 Titik-KTT (PBB)	39
3.4	Carta alir aturcara pelaksanaan kaedah 4 Titik-KTT (PBB)	42
4.1	Pelaksanaan kaedah-kaedah lelaran bagi ujikaji berangka	44
4.2	Perbandingan bilangan lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat kedua permasalahan pertama	46
4.3	Perbandingan masa lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat kedua permasalahan pertama	46
4.4	Perbandingan bilangan lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat keempat permasalahan pertama	48
4.5	Perbandingan masa lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat keempat permasalahan pertama	48
4.6	Perbandingan bilangan lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat kedua permasalahan dua	51
4.7	Perbandingan masa lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat kedua permasalahan dua	51
4.8	Perbandingan bilangan lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat keempat permasalahan dua	53

4.9	Perbandingan masa lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat keempat permasalahan dua	53
4.10	Perbandingan bilangan lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat kedua permasalahan tiga	56
4.11	Perbandingan masa lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat kedua permasalahan tiga	56
4.12	Perbandingan bilangan lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat keempat permasalahan tiga	58
4.13	Perbandingan masa lelaran kaedah 4 Titik-KTT, 2-KTT(PBB) dan 4-Titik KTT(PBB) untuk skema pendiskretan peringkat keempat permasalahan tiga	58



**SENARAI JADUAL**

No. Jadual		Muka Surat
4.1	Keputusan berangka bagi permasalahan pertama mengikut skema pendiskretan peringkat kedua dan keempat dari segi bilangan dan masa lelaran serta ralat maksimum	49
4.2	Keputusan berangka bagi permasalahan dua mengikut skema pendiskretan peringkat kedua dan keempat dari segi bilangan dan masa lelaran serta ralat maksimum	54
4.3	Keputusan berangka bagi permasalahan tiga mengikut skema pendiskretan peringkat kedua dan keempat dari segi bilangan dan masa lelaran serta ralat maksimum	59



**UMS**  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

## SENARAI ISTILAH

Singkatan	Bahasa Inggeris	Bahasa Melayu
PBB	Successive	Pengenduran Berlebihan
	Overrelaxation	Berturut-turut
2 Titik-KTT	2 Point Explicit	2 Titik Kumpulan Tak
	Group	Tersirat
2 Titik-KTT(PBB)	2 Point Explicit	2 Titik Kumpulan Tak
	Group	Tersirat Pengenduran
	Overrelaxation	Berlebihan Berturut-turut
4 Titik-KTT	4 Point Explicit	4 Titik Kumpulan Tak
	Group	Tersirat
4 Titik-KTT(PBB)	4 Point Explicit	4 Titik Kumpulan Tak
	Group	Tersirat Pengenduran
	Overrelaxation	Berlebihan Berturut-turut
KTTNP	Explicit Decoupled	Kumpulan Tak Tersirat
	Group	Nyah Pasangan



UMS  
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

## BAB 1

### PENDAHULUAN

#### 1.1 PENGENALAN

Dalam pembelajaran matematik seharian di kolej mahupun di universiti pelajar selalu didedahkan dengan penyelesaian terus atau analitis. Banyak permasalahan matematik boleh diselesaikan secara analitik dengan pelbagai kaedah tetapi persoalan timbul dalam bagaimana hendak menyelesaikan masalah yang tidak dapat diselesaikan secara analitis. Tentu sahaja kaedah analitik tidak lagi muktamad dalam mencari penyelesaian dan sebaliknya kaedah berangka diperkenalkan untuk mengatasi keterbatasan kaedah analitis. Sehubungan dengan itulah kajian ini dilakukan untuk mengkaji kaedah berangka yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai sempadan dua titik tak linear menerusi persamaan penghampiran yang akan dibincangkan kelak.

Kaedah beza terhingga (KBT) telah dibangunkan pertama kali oleh A.Thom pada tahun 1920 di bawah tajuk “the method of square” untuk menyelesaikan persamaan hidrodinamik tak linear (Thom & Apelt, 1961). Kaedah beza terhingga adalah



teknik berdasarkan penganggaran yang membolehkan persamaan pembezaan digantikan dengan persamaan beza terhingga. Persamaan beza terhingga ini adalah bersifat aljabar yakni boleh disusun dalam bentuk matriks dan penyelesaian kepada sistem matriksnya berdasarkan titik grid. Kaedah beza terhingga amat mudah digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan pembezaan. Terdapat beberapa skema pendiskretan dalam kaedah beza terhingga bergantung kepada peringkat yang digunakan dalam Kembangan Siri Taylor. Dua masalah yang berkait rapat dengan persamaan pembezaan ialah masalah nilai awalan dan nilai sempadan dua titik.

Masalah nilai sempadan dua titik boleh dibahagikan kepada linear dan tak linear. Masalah tak linear sering dihadapi dalam bidang sains, kejuruteraan dan ekonomi. Dalam bidang sains fizik misalnya masalah ini wujud dalam pergerakan pendulum. Ahli fizik amat berminat mengkaji ayunan pendulum pada sudut mana dan pada masa mana ia berada. Ayunan ini dapat dimodelkan secara matematik dengan persamaan pembezaan peringkat kedua tak linear. Permasalahan yang wujud inilah telah menarik beberapa pengkaji seperti Sung (2001) ini untuk menyelesaikan masalah nilai sempadan dua titik tak linear peringkat kedua.

## **1.2 PENGENALAN KONSEP PERSAMAAN TERBITAN**

Persamaan terbitan adalah meluas penggunaannya dalam matematik tulen dan gunaan. Terdapat lima jenis persamaan terbitan iaitu persamaan terbitan biasa (PTB), persamaan terbitan separa (PTS), persamaan terbitan lengah (PTL), persamaan terbitan stokastik (PTS) dan persamaan terbitan algebra (PTA). Dua jenis yang biasa

digunakan pada hari ini ialah persamaan terbitan biasa (PTB) dan persamaan terbitan separa (PTS)

### 1.2.1 Persamaan Terbitan Biasa (PTB)

Dalam matematik, persamaan terbitan biasa (PTB) adalah suatu hubungan yang mengandungi fungsi bagi hanya satu pembolehubah tidak bersandar serta mempunyai satu atau lebih pembezaan untuk pembolehubah tersebut.

Berikut adalah persamaan am bagi persamaan terbitan biasa (PTB) untuk peringkat ke  $n$ :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)} \quad (1.1)$$

dengan  $y$  sebagai fungsi yang tidak diketahui,

$$y: R \rightarrow R$$

Manakala bagi fungsi yang bernilai vektor,

$$y: R \rightarrow R^m$$

fungsi  $F$  pada persamaan (1.1) dinamakan sistem persamaan terbitan biasa dengan dimensi  $m$ . Apabila suatu persamaan terbitan dengan peringkat ke  $n$  itu berada dalam bentuk,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.2)$$

persamaan (1.2) dinamakan persamaan terbitan tak tersirat manakala persamaan dalam bentuk persamaan (1.1) dinamakan sebagai persamaan terbitan tersirat. Suatu persamaan terbitan itu adalah linear sekiranya fungsi  $F$  boleh ditulis sebagai gabungan linear oleh pembezaan bagi  $y$  seperti berikut:

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)y^{(i)} + r(x) \quad (1.3)$$

dengan  $a_i(x)$  dan  $r(x)$  adalah fungsi selanjut dalam  $x$ . Sesuatu persamaan terbitan linear itu adalah homogenus sekiranya  $r(x)=0$  dan persamaan itu adalah tidak homogenus seandainya  $r(x) \neq 0$ .

### 1.2.2 Persamaan Terbitan Separa

Persamaan terbitan separa merupakan suatu hubungan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui dengan beberapa pembolehubah tidak bersandar dan pembezaan separanya adalah terhadap pembolehubah-pembolehubah tersebut. Berikut adalah persamaan am bagi persamaan terbitan separa mudah,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0. \quad (1.4)$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahawa nilai-nilai  $u(x, y)$  adalah tidak bersandar terhadap  $x$ . Oleh itu, penyelesaian am bagi persamaan (1.4) ialah

$$u(x, y) = f(y) \quad (1.5)$$

dengan  $f$  ialah fungsi terbezakan bagi  $y$ . Persamaan terbitan biasa yang sesuai untuk kes ini ialah

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (1.6)$$

yang mempunyai penyelesaian

$$u(x) = c,$$

dengan  $c$  ialah nilai pemalar yang tidak bersandar terhadap  $x$ . Penyelesaian am bagi persamaan terbitan biasa melibatkan pemalar yang terbezakan, manakala penyelesaian

bagi persamaan terbitan separa melibatkan fungsi yang terbezakan. Penyelesaian bagi persamaan terbitan separa adalah tidak unik. Oleh itu persamaan terbitan separa mempunyai syarat-syarat sempadan di mana penyelesaian tersebut boleh ditakrifkan.

### 1.2.3 Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Tak Linear

Menurut Sung (2001) masalah nilai sempadan dua titik tak linear peringkat kedua ialah masalah yang mana untuk suatu set persamaan pembezaan biasa tak linear peringkat kedua, syarat sempadan diberi pada awalan dan akhiran pembolehubah tak bersandar. Seterusnya ini mewujudkan nilai sempadan dua titik iaitu pada awalan dan akhiran pembolehubah bersandar. Secara amnya sistem persamaan pembezaan tak linear dapat diperihalkan seperti:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1.7)$$

dengan dua nilai sempadan  $y(a) = \alpha$  dan  $y(b) = \beta$ . Terdapat 3 jenis syarat sempadan yang boleh dikenalpasti untuk persamaan terbitan biasa (Hoffman, 1992)

- a. Syarat sempadan Dirichlet iaitu fungsi  $y(x)$  ditentukan nilainya.
- b. Syarat sempadan Nuemann iaitu nilai fungsi terbitan pertama  $y'(x)$  diberi.
- c. Syarat sempadan campuran iaitu kombinasi antara Dirichlet dan Neumann.

dan bagi kes kajian ini syarat sempadan jenis Dirichlet digunakan.

### 1.3 PEMERIHAN KONSEP MATEMATIK ASAS

Dalam kajian ini, konsep matematik asas yang diperlukan untuk menyelesaikan sistem persamaan pembezaan peringkat kedua adalah seperti matriks algebra, sistem persamaan linear dan kembangan siri Taylor. Kembangan siri Taylor digunakan dalam proses pendiskretan persamaan peringkat kedua yang mengandungi fungsi tak linear di dalamnya. Dalam pendiskretan ini terdapat dua fasa yang terlibat. Fasa pertama melibatkan pendiskretan sistem persamaan pembezaan peringkat kedua yang tak linear dan fasa kedua mula menurunkan pendiskretan fasa pertama kepada sistem persamaan linear dengan kaedah Newton. Setelah fasa kedua selesai maka suatu sistem persamaan linear terjana dalam bentuk matriks yang memerlukan beberapa konsep asas matriks untuk menyelesaikannya.

#### 1.3.1 Konsep Matriks Algebra

Matriks merupakan satu tatasusunan bagi elemen-elemen atau unsur-unsur kuantiti yang abstrak. Matriks mengandungi nombor-nombor nyata atau nombor kompleks. justeru itu, matriks yang melibatkan nombor kompleks dikenali sebagai matriks kompleks. Seterusnya matriks juga digunakan untuk mengungkapkan sistem persamaan linear. Maka matriks boleh ditambah, ditolak atau didarab seperti persamaan matematik biasa.

Suatu matriks yang mempunyai bilangan baris  $m$  dan lajur  $n$  dipanggil matriks  $m \times n$  iaitu  $m$  dan  $n$  dikatakan sebagai dimensi bagi matriks tersebut. Dimensi sesuatu matriks itu selalunya dinyatakan dalam bilangan baris terlebih dahulu dan

kemudiannya bilangan lajur. Tertib atau saiz sesuatu matriks dinyatakan sebagai  $m \times n$ . Sekiranya bilangan baris dan lajur adalah sama, maka matriks tersebut dikenali sebagai matriks segiempat sama dan ditakrifkan sebagai matriks  $n \times n$  atau matriks tertib  $n$ . Perhatikan tatasusunan suatu matriks  $A_{n \times n}$  yang dinyatakan sebagai (Mcmahon, 2006)

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Berikutnya adalah pemerihalan beberapa jenis matriks.

#### A. Matriks Baris Dan Lajur

Matriks baris merupakan matriks yang mempunyai satu baris sahaja yang pada peringkat  $1 \times n$ , manakala matriks lajur yang berperingkat  $m \times 1$  merupakan matriks yang mempunyai satu lajur sahaja. Apabila matriks tersebut digunakan untuk mentakrifkan vektor, maka matriks lajur dan matriks baris masing-masing dikenali sebagai vektor lajur dan vektor baris. Unsur-unsur  $(i, j)$  bagi vektor baris atau vektor lajur dikenali sebagai komponen vektor. Vektor baris,  $\vec{r}$  dan vektor lajur,  $\vec{s}$  dinyatakan masing-masing sebagai (Mcmahon, 2006)

$$\vec{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n] \text{ dan } \vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

## B. Matriks Pepenjuru

Matriks pepenjuru merupakan matriks segiempat sama yang unsur-unsur pepenjuru tidak bernilai sifar. Suatu matriks itu, misalnya matriks  $D = [d_{ij}]$  merupakan matriks pepenjuru sekiranya  $d_{ij} = 0$  untuk  $i \neq j$ . Bentuk matriks pepenjuru  $D$  adalah seperti berikut (Mcmahon, 2006)

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

## C. Matriks Tiga Pepenjuru

Matriks tiga pepenjuru ialah matriks dengan unsumnya tersusun secara serong dari kiri ke kanan dengan hanya mempunyai tiga pepenjuru tak bernilai sifar dan selainnya ialah sifar. Matriks tiga pepenjuru dapat dinyatakan secara umumnya sebagai (Mcmahon, 2006)

$$B = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

#### D. Matriks Jacobian.

Matriks Jacobian ialah matriks yang terhasil daripada kaedah Newton (Gene & James, 1981). Unsur dalam matrik ini adalah terbitan pertama bagi setiap fungsi terhadap setiap pembolehubah yang terkandung dalam fungsi berkenaan. Bentuk am matriks Jacobian adalah

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix},$$

dengan

$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_m]^T.$$

#### E. Matriks Identiti

Matriks identiti pula ialah matriks segiempat sama yang unsur-unsur pepenjuruanya bernilai satu dan unsur-unsur lain adalah bernilai sifar. Matriks identiti selalunya diwakili dengan  $I$  dan boleh diringkaskan sebagai  $I_n = [e_{ij}]$ . Matriks identiti  $I$  boleh ditakrifkan sebagai (McMahon, 2006):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$