PENGUBAHSUAIAN PERINGKAT KELIMA KAEDAH NEWTON BAGI MENYELESAIKAN PERSAMAAN TAK LINEAR

ANN BRENDA CHARLES

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN DARIPADA

SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK

SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2009

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasaan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

30 APRIL 2009

ANN BRENDA CHARLES

HS2005-3742

DIPERAKUKAN OLEH

1. **PENYELIA**
   (PROF. MADYA DR. JUMAT SULAIMAN)

2. **PEMERIKSA**
   (ASDALIFAH TALIBE)

3. **DEKAN**
   (PROF. DR. MOHD HARUN ABDULLAH)

PENGHARGAAN

Saya bersyukur dengan nikmat limpah dan kurniannya dapatlah saya menyiapkan kerja projek ini dengan jayanya.

Terlebih dahulu, ribuan terima kasih diucapkan kepada Universiti Malaysia Sabah kerana membenarkan saya menjalankan projek ini. Saya juga ingin merakamkan setinggi-tinggi penghargaan kepada penyelia saya, Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman yang telah menjadi pembimbing untuk menyiapkan projek ini. Beliau telah banyak memberikan saya panduan dan tunjuk ajar serta nasihat berguna yang sangat bermanfaat di masa hadapan mahu pun pada hari ini.

Selain itu, rakan-rakan saya juga memberi kerjasamaan dan galakan untuk melaksanakan kerja kursus ini. Mereka menjadi sumber motivasi saya, dan mereka merupakan Nelviana, Edith, Jennifer, Michelle, Christy, Suzie, dan Cyntia, tidak lupa juga kepada ahli keluarga saya ibubapa, Arthur Boniventure, Walter Ryan, Christine Carltina, dan Clare Cindy yang telah banyak membantu dan menyokong diwaktu saya memerlukan.

Sebelum mengundur diri, saya ingin mengucapkan ribuan penghargaan kepada pihak yang terlibat sama ada secara langsung atau tidak langsung dalam menjayakan projek ini.

ABSTRAK

Disertasi ini memberikan penerbitan kaedah lelaran Newton ke peringkat yang lebih tinggi terutamanya sehingga kaedah lelaran Newton peringkat kelima. Perbandingan kaedah lelaran Newton pada peringkat kedua, ketiga, keempat dan kelima akan diukur dari segi ketepatan dan bilangan lelaran. Kajian menunjukkan ketepatan dan bilangan lelaran pada kaedah lelaran Newton peringkat kelima adalah lebih baik berbanding kaedah lelaran Newton peringkat kedua. Contoh ujikaji berangka disertakan untuk menunjukkan bahawa kaedah lelaran Newton peringkat kelima adalah lebih baik dalam penyelesaian persamaan tak linear.

Fifth order modification of Newton's method for solving nonlinear equations

ABSTRACT

In this paper, we give an illustration on derivation of Newton method for solving nonlinear equations from the lower order two to high order five. The existing orders of Newton's method were compared from order two to order five based on accuracy and number of iteration. It shown that the accuracy of order five of Newton's method closed to the exact solution compared to existing order two of Newton's method. Numerical examples are given to show that the Newton's method of order five is much better to solve the nonlinear equations.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

No. Rajah Muka Surat

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Persamaan Tak Linear

Persamaan tak linear melibatkan permasalahan matematik yang melibatkan persamaan pembezaan, pengoptimuman, dan lain-lain lagi. Mencari punca bagi persamaan yang berbentuk:

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

merupakan masalah yang biasa ditemui dalam matematik bagi persamaan tak linear. Penyelesaian atau punca bagi persamaan di atas tidak dapat dinyatakan secara tersirat.

1.2 Pengelasan Persamaan Pembezaan

Persamaan pembezaan ialah persamaan yang melibatkan fungsi anu bagi satu atau lebih pembolehubah. Persamaan pembezaan terdiri daripada persamaan pembezaan biasa dan persamaan pembezaan separa.

Jika fungsi tersebut bersandar terhadap satu pembolehubah tak bersandar, maka terbitan yang wujud dalam persamaan ini ialah terbitan biasa. Dengan demikian persamaan ini dinamakan persamaan pembezaan biasa.

Sebaliknya jika fungsi tersebut bergantung pada beberapa pembolehubah yang tidak bersandar, maka terbitan yang wujud dalam persamaan ini ialah terbitan separa. Dengan demikian persamaan pembezaan ini dinamakan persamaan pembezaan separa.

1.2.1 Persamaan Pembezaan Separa

Suatu persamaan pembezaan separa adalah berbentuk:

$$F(x, y, ..., u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...) = 0. \tag{1.2}$$

Persamaan ini melibatkan beberapa pembolehubah tak bersandar $x, y, ...,$ fungsi u bagi pembolehubah ini, dan terbitan separa $u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...$ bagi fungsi tersebut. Terbitan separa ini ditakrifkan sebagai

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ... \tag{1.3}$$

1.2.2 Persamaan Pembezaan Biasa

Satu persamaan pembezaan biasa berbentuk

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.4}$$

Melibatkan pembolehubah tak bersandar x, dan satu fungsi y dan terbitan $y', y'', ..., y^{(n)}$ yang bersandar terhadap pembolehubah x, dengan

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}, ... \tag{1.5}$$

Sebagai contoh persamaan pembezaan biasa adalah seperti

$$y' = xy + 1 \tag{1.6}$$

$$y' = y \, kos \, x \tag{1.7}$$

1.3 Kaedah Berangka

Kaedah yang digunakan bagi menyelesaikan permasalahan yang melibatkan persamaan tak linear seperti persamaan pembezaan adalah kaedah analitik. Kaedah analitik ini tidak memadai untuk menyelesaikan persamaan pembezaan seperti yang dinyatakan oleh Dormand (1999). Oleh itu, kaedah berangka diperlukan bagi mendapatkan penyelesaian yang jitu. Dormand (1999) turut menyatakan bahawa dengan menggunakan kaedah berangka bagi menyelesaikan persamaan pembezaan dapat membantu mencari penyelesaian hingga ke tahap kejituan yang dikehendaki. Kesemua kaedah berangka ini termasuk dalam satu kelas kaedah yang dikenali sebagai kaedah lelaran (Abdullah, 1990).

Secara umumnya, kaedah lelaran ini dapat dibahagikan kepada dua kategori. Kategori yang pertama ialah kaedah yang menumpu secara sejagat dengan penumpuannya terjamin, tetapi biasanya perlahan. Manakala kategori yang kedua ialah kaedah yang penumpuannya dapat dijamin, sekiranya anggaran awal cukup hampir dengan punca. Kaedah ini dikenali sebagai kaedah yang menumpu secara setempat (Abdullah, 1990).

Pada kebiasaaannya, kaedah yang menumpu secara setempat merujuk pada dua kategori kaedah lagi seperti kaedah sekan dan kaedah Newton Raphson. (Abdullah, 1990)

1.4 Kaedah Siri Taylor

Masalah nilai awal bagi persamaan pembezaan biasa peringkat pertama diberikan oleh

$$y' = f(x, y). \tag{1.8}$$

Pengembangan bagi $y(x_{i+1})$ dalam sebutan polinomial Taylor berdarjah n pada x_i memberikan

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x_i + \theta_i h). \tag{1.9}$$

untuk suatu $0 \leq \theta_i \leq 1$ dan $h = x_{i+1} - x_i$.

Daripada persamaan (1.8), diperoleh

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{1.10}$$

$$y^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}[f(x, y(x))]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y(x))] + \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y(x))]\frac{dy}{dx}$$

$$= f_x + f_y f, \tag{1.11}$$

$$y^{(3)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}[f(x, y(x))]$$

$$= \frac{d}{dx}[f_x + f_y f]$$

$$= f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f(f_y)^2 + f^2 f_{yy} \tag{1.12}$$

dan seterusnya

$$y^{(k)}(x) = \frac{d^{(k-1)}}{dx^{k-1}}[f(x, y(x))]. \tag{1.13}$$

Jika persamaan (1.10) hingga (1.13) digantikan ke dalam persamaan (1.9) akan diperoleh satu pengembangan dalam h dan jika sebutan yang mengandungi θ diabaikan maka nilai y pada x_{i+1} dapat dikira. Pengembangan tersebut ialah:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y_i) \tag{1.14}$$

dengan ralat pangkasan (Abdullah,1990),

$$E_T = \frac{f^{(n)}(\theta)h^{n+1}}{(n+1)!}, x_i \langle \theta \langle x_{i+1} \tag{1.15}$$

1.5 Kaedah Lelaran Newton Raphson Piawai dan Terubahsuai

Katakan x_0 adalah anggaran terbaik terhadap r dan biar $r = x_0 + h$. Oleh kerana punca r dan $h = r - x_0$, nilai nombor h mengukur bagaimana jauh untuk menganggarkan x_0 daripada nilai kebenarannya.

Dengan demikian nilai h adalah kecil, kita boleh menggunakan linear (garis tangen) yang hampir untuk membuat kesimpulan dengan

$$0 = f(r) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) \tag{1.16}$$

dan seterusnya, $f'(x_0)$ adalah hampir pada 0. Sementara

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{1.17}$$

dan diikuti

$$r = x_0 + h \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{1.16}$$

Penganggaran pada x_1 terhadap r seterusnya diberikan oleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{1.18}$$

Penganggaran yang seterusnya pada x_2 diperolehi daripada x_1 dengan cara yang sama seperti nilai yang didapati pada x_0 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{1.19}$$

Cara kaedah ini diteruskan, jika x_n adalah penganggaran nilai awal penganggaran maka penganggaran x_{n+1} diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.20}$$

Seperti yang diketahui masalah yang dihadapi dalam penggunaan kaedah Newton Raphson ialah mengira terbitan $f'(x)$ pada setiap lelaran. Pengiraan $f'(x)$ melibatkan tambahan bilangan operasi-operasi seperti penambahan dan pendaraban lebih-lebih lagi jika $f'(x)$ mempunyai bentuk persamaan yang kompleks. Bagi mengatasi masalah tersebut, pengubahsuaian ke atas kaedah Newton Raphson perlu diterangkan. Kebaikkan kaedah ini adalah tidak perlu mengira nilai $f'(x)$ pada setiap lelaran. Misalnya

$$x = x - f(x). \tag{1.21}$$

dan misalnya persamaan lelaran yang digunakan ialah

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n). \tag{1.22}$$

Daripada persamaan (1.22) dapat dibayangkan bahawa $f(x_n)$ adalah sebutan pembetulan bagi x_n. Dengan ini, nilai punca hampiran yang diperbaiki x_{n+1} diperoleh dengan mengunakan x_n sebanyak $f(x_n)$ yang sekiranya $x_n \approx \alpha$, maka $f(x) \approx 0$.

Untuk membentuk kaedah Newton terubahsuai, maka dianggap nilai pembetulan sebagai $cf(x_n)$, iaitu

$$x_{n+1} = x_n - cf(x_n). \tag{1.23}$$

Menjadikan persamaan lelaran (1.23) satu persamaan yang mempunyai peringkat penumpuan kedua, maka diperlukan

$$\frac{d}{dx}\big(x - cf(x)\big)|_{x=a} = 0 \tag{1.24}$$

memberikan

$$c = \frac{1}{f'(x)}\,|_{x=a} \tag{1.25}$$

Jadi persamaan lelaran (1.24) berperingkat kedua maka diperlukan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\alpha)} \tag{1.26}$$

Tetapi disebabkan α tak diketahui nilainya, maka anggaran bagi $f'(\alpha)$ ini dapat diambil sama ada $f'(x_0)$ atau $f'(x_m),\ m = 0, 5, 10, \ldots$ iaitu,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \tag{1.27}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_m)}, \qquad m = 0, 5, 10, \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, m < n \tag{1.28}$$

Kaedah ini yang dikenali sebagai kaedah Newton terubahsuai. Walaupun kaedah ini tidak tepat berperingkat kedua, tetapi kaedah ini merupakan hampiran bagi kaedah peringkat kedua. (Abdullah,1990)

1.7 Objektif Kajian

Terdapat tiga objektif di dalam kajian ini seperti yang disenaraikan di bawah:

i. Memahami bagaimana menerbitkan kaedah Newton ke peringkat yang lebih tinggi terutamanya sehingga peringkat kelima.

ii. Membangunkan algoritma kaedah Newton Raphson peringkat kelima untuk menyelesaikan persamaan tak linear.

iii. Membandingkan kaedah Newton Raphson peringkat kelima dengan kaedah Newton Raphson peringkat kedua, ketiga dan keempat yang sedia ada dari aspek ketepatan, dan bilangan lelaran.

1.8 Skop Kajian

Kajian akan dijalankan menerusi kaedah Newton Raphson pada peringkat kedua, ketiga, keempat dan kelima. Semua persamaan kaedah tersebut akan diperihalkan secara terperinci pada bab 3. Seterusnya, perbandingan kaedah-kaedah tersebut dalam menyelesaikan persamaan tak linear akan dilakukan dengan melihat keberkesanannya dari segi ketepatan dan bilangan lelaran yang terhasil.

BAB 2

ULASAN LITERATUR

2.1 Pengenalan

Dalam kajian yang terdahulu, terdapat pelbagai kaedah yang telah dibangunkan bagi menyelesaikan persamaan tak linear. Noor dan Ahmad (2006) menyatakan terdapat kaedah seperti Regula Fulsi dan Newton yang telah dibangunkan bagi penyelesaian persamaan tak linear $f(x) = 0$.

Kaedah seperti Regula Fulsi dan Newton ini dibangunkan hasil daripada mengunakan kaedah Taylor interpolasi polimial, kuadratur dan terdapat beberapa lagi teknik kaedah yang lain. Kaedah yang telah dibangunkan ataupun baru dibangunkan dikategorikan kepada kaedah satu langkah dan keadah dua langkah pada peringkat yang sama (Noor *et al.*, 2006a).

Javidi (2007) membuat penyusulan berkenaan kaedah lelaran bagi menyelesaikan persamaan tak linear. Beliau menyusulkan kembali persamaan tak linear yang diberikan kepada satu pasang sistem tak linear. Sebelum ini, teknik ini turut digunakan oleh beberapa pengkaji seperti Chun (2005) dan Noor (2007b).

Pada masa kini, terdapat terbitan kaedah Newton dari peringkat rendah sehingga peringkat tinggi dengan syarat peringkat ini diterbitkan daripada kaedah satu langkah sahaja. Akan tetapi, pengubahsuaian kaedah ini telah berlaku pada awal kurun ke-21 dimana para pengkaji mencari jalan mengolah dan mengubahsuai kaedah Newton supaya agar kaedah ini dapat diperbaiki sebaiknya (Chun, 2007a).

Pada awal 2006, para pengkaji yang berminat terhadap pengubahsuaian kaedah Newton telah membandingkan kaedah ini dengan kaedah lain seperti kaedah King, dan kaedah Traub-Ostrowski dari segi kestabilan dan bilangan lelaran yang dihasilkan. Pengubahsuaian kaedah Newton berlaku dari segi bagaimana kaedah Newton dapat diterbitkan, termasuklah mengunakan kaedah penguraian Adomian dan kaedah Halley (Abbasbandy, 2003).

Pada masa ini, terdapat perkembangan terhadap kaedah lelaran dalam memperbaiki ketepatan peringkat kaedah Newton ataupun juga dikenali sebagai kaedah Newton Raphson melalui kaedah penguraian Adomian (Abbasbandy, 2003).

2.2 Kaedah Newton Peringkat Kedua

Kaedah Newton pada peringkat kedua dikenali juga sebagai kaedah lelaran yang mencari punca α dengan mengunakan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.1}$$

dan menumpu secara kuadratik pada suatu jiranan pada α. Kaedah Newton peringkat kedua mempunyai sifat penumpuan peringkat kedua.

2.3 Kaedah Newton Peringkat Ketiga

Pada peringkat terbitan ketiga Chun (2008a), dalam kajiannya iaitu membina kaedah lelaran memperbaiki kaedah Newton untuk menyelesaikan persamaan tak linear menunjukkan gambaran terdapat wujud fomula lelaran daripada kaedah Newton-Steffen yang diubahsuai menjadi suatu formula baru untuk kaedah Newton pada peringkat ketiga. Seterusnya pembuktikan penumpuan pada peringkat itu telah memenuhi syarat kembangan yang telah dihasilkan.

Chun (2008a) turut membandingkan kelancaran terbitan ini dengan pelbagai terbitan kaedah lelaran lain seperti kaedah Weerakon dan Fernando (WF), Homeier dan sebagainya yang mempunyai peringkat yang sama dan mendapati sekurang-kurangnya mempunyai sifat yang hampir sama iaitu menumpu pada peringkat terbitan ketiga.

Tahun yang sama Chun (2008a), memudahkan pengubahsuaian kaedah Newton daripada kaedah peringkat ketiga dan peringkat kedua variasi daripada kaedah Chebyshev-Halley dan membuktikan ia mempunyai penumpuan peringkat terbitan ketiga.

Kajian terdahulu, Chun (2007a) menggunakan kaedah lelaran peringkat kedua untuk mengubahsuaikan kaedah lelaran Newton untuk menyelesaian persamaan tak linear. Kajian membina kaedah lelaran Newton peringkat ketiga dengan menggunakan kaedah lelaran Newton peringkat kedua dan didapati bahawa kaedah Newton peringkat kedua dapat digunakan untuk mengembangkan formula baru khususnya memberikan kaedah Newton peringkat ketiga yang lebih baik daripada kaedah Newton peringkat kedua.

Chun (2007c) mengubahsuaikan kaedah lelaran Newton peringkat ketiga dengan mengunakan kaedah lelaran famili dua parameter baru yang diperihalkan oleh Potra dan Ptak untuk menyelesaikan persamaan tak linear. Setiap lelaran kaedah baru memerlukan dua penilaian fungsi dan satu penilaian terhadap terbitan pertama.

Seterusnya, Noor *et al.* (2007) mencadangkan dan menganalisis kaedah lelaran dua langkah untuk menyelesaian persamaan tak linear yang dipanggil sebagai pengubahsuaian kaedah Householder tanpa terbitan kedua daripada persamaan tak linear. Didapati bahawa kaedah ini dapat dibuktikan menumpu.

2.4 Kaedah Newton Peringkat Keempat dan Kelima

Chun dan Ham (2008b) pada peringkat terbitan keempat kaedah Newton tidak memerlukan pengaturcaraan daripada peringkat terbitan kedua telah berkembang dan dianalisis. Chun dan Ham (2008b) juga telah menghasilkan pengubahsuaian peringkat keempat kaedah Newton daripada kewujudan kaedah yang mempunyai dua fungsi dan hanya satu penilaian fungsi terbitan bagi setiap lelaran. Akan tetapi pada peringkat terbitan kelima, kaedah Newton memerlukan dua fungsi dan dua terbitan pertama penilaian per langkah. Oleh itu, pada peringkat terbitan kelima dibangunkan dengan menggunakan kaedah lelaran dua langkah. Kaedah ini juga dibandingkan sama seperti pengkaji-pengkaji sebelum ini dan mendapati kaedah ini lebih baik berbanding dengan kaedah-kaedah lain yang sama peringkat dengannya (Chun dan Ham, 2007b).

BAB 3

METODOLOGI

3.1 Pengenalan

Terdapat satu bahagian dalam bab metodologi ini. Bahagian ini menunjukkan bagaimana untuk menerbitkan kaedah Newton iaitu kaedah peringkat terbitan kedua sehingga peringkat terbitan kelima akan ditunjukkan. Terbitan kaedah ini bukan hanya setakat terbitan pada peringkat kelima sahaja tetapi juga seterusnya. Akan tetapi dalam kajian ini, seperti yang telah dinyatakan dalam skop kajian iaitu dalam bab yang pertama, kaedah lelaran Newton ini hanya akan difokuskan daripada kaedah lelaran peringkat kedua sehingga kaedah lelaran peringkat terbitan kelima sahaja. Bahagian ini memenuhi objektif yang pertama dalam kajian ini.

3.2 Kaedah Lelaran Newton

Kaedah lelaran Newton terdiri daripada kaedah lelaran peringkat kedua, ketiga, keempat, kelima dan seterusnya. Seperti yang telah dinyatakan sebelum ini, kajian ini hanya akan memfokuskan sehingga kaedah lelaran Newton peringkat kelima.