

**KAEDAH LELARAN PENGENDURAN
BERLEBIHAN BERPECUTAN DENGAN SKEMA
BEZA TERHINGGA TAK SETEMPAT KE ATAS
MASALAH NILAI SEMPADAN ELIPTIK TAK
LINEAR**



MOHD USRAN BIN ALIBUBIN

**FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH
2016**

**KAEDAH LELARAN PENGENDURAN
BERLEBIHAN BERPECUTAN DENGAN SKEMA
BEZA TERHINGGA TAK SETEMPAT KE ATAS
MASALAH NILAI SEMPADAN ELIPTIK TAK
LINEAR**



MOHD USRAN BIN ALIBUBIN

UTMS
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

**TESIS YANG DIKEMUKAKAN UNTUK
MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA**

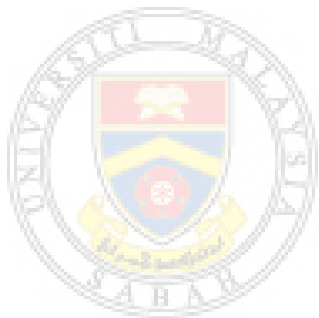
**FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH
2016**

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

06 Disember 2016

Mohd Usran Bin Alibubin
MS 1411017T



UMS
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

PENGESAHAN

NAMA : **MOHD USRAN BIN ALIBUBIN**
NO. MATRIKS : **MS 1411017T**
TAJUK : **KAEDAH LELARAN PENGENDURAN BERLEBIHAN
BERPECUTAN DENGAN SKEMA BEZA TERHINGGA TAK
SETEMPAT KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN
ELIPTIK TAK LINEAR**
Ijazah : **SARJANA SAINS (MATEMATIK)**
VIVA DATE : **20 OKTOBER 2016**

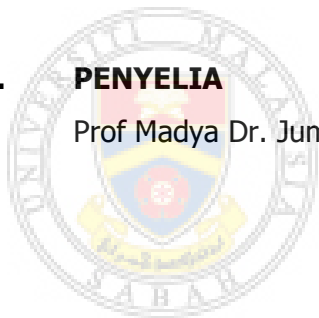
DISAHKAN OLEH;

1.

PENYELIA

Prof Madya Dr. Jumat Sulaiman

Tandatangan



UMS
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

PENGHARGAAN

Segala puji ke atas Allah S.W.T, pemilik segala ilmu pengetahuan dan rahsia segenap pelusuk alam. Selawat dan salam ke atas junjungan Nabi Muhammad S.A.W yang telah diutuskan sebagaimana rahmat untuk sekalian alam, juga ke atas keluarganya, para sahabat dan sekalian yang berjuang di atas nama Ilahi.

Saya ingin mengambil kesempatan untuk mengucapkan jutaan terima kasih kepada penyelia saya Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman atas semua nasihat, tunjuk ajar, doa, galakan, kesabaran dan penyuntingan dalam usaha untuk menyiapkan tesis ini. Pandangan dan idea beliau memberi impak yang luar biasa terhadap keseluruhan tesis ini.

Setinggi-tinggi penghargaan dan terima kasih buat ibu dan bapa serta ahli keluarga atas galakan, nasihat, bimbingan serta bantuan dari segi kewangan sepanjang pengajian dan penulisan tesis ini. Selain itu, saya ingin berterima kasih kepada abang Majid Khan Majahar Ali, Kamarulzaman Md Akhir di atas nasihat, tunjuk ajar dan dorongan mereka yang tiada nilainya. Buat teman-teman seperjuangan yang sentiasa bersama Mohd Zaidey Sani, Asnawi Ahmad, Supardie Roland, Imran Daling, Mohd Azam Ab Gani, Lawrance Anak Bansa dan semua rakan-rakan yang memberi sokongan moral dalam menyiapkan tesis ini.

Saya juga ingin merakamkan ucapan terima kasih kepada pensyarah-pensyarah Universiti Sabah Malaysia khususnya dari Fakulti Sains dan Sumber Alam yang telah memberikan semangat dan terlibat secara langsung mahupun tidak dan semua pihak yang turut membantu ke arah kejayaan pengajian penulis. Semoga bantuan mereka akan menjadi amal di sisi Allah S.W.T.

Mohd Usran bin Alibubin
Mei 2016

ABSTRAK

Penyelesaian berangka yang melibatkan masalah nilai sempadan eliptik tak linear memainkan peranan yang penting untuk menggambarkan pelbagai permasalahan fizikal dalam bidang sains, ekonomi dan bidang kejuruteraan yang dibentangkan secara matematik dengan menggunakan model persamaan tak linear. Dalam kajian ini, penggunaan skema pendiskretan beza terhingga bagi kes sapuan penuh, separuh dan suku telah dipertimbangkan untuk mendiskretkan masalah nilai sempadan eliptik tak linear. Proses pendiskretan telah dilaksanakan ke atas permasalahan yang dipertimbangkan untuk menerbitkan persamaan penghampiran tak linear bagi kes sapuan penuh, separuh dan suku. Selanjutnya, persamaan penghampiran tak linear tersebut pula digunakan untuk menjanakan sistem persamaan penghampiran tak linear yang sepadan. Seterusnya, sistem persamaan penghampiran tak linear tersebut perlu diubah kepada sistem persamaan linear yang sepadan dengan menggunakan skema pendiskretan min aritmetik tak setempat sapuan penuh, separuh dan suku. Oleh kerana sistem persamaan linear yang dijanakan berskala besar, maka objektif utama kajian ini adalah untuk menganalisis keberkesanan kaedah lelaran Berpecutan Berpemberat (AOR) bersama dengan skema min aritmetik tak setempat dalam menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut. Bagi tujuan perbandingan, kajian ini memperihalkan perumusan dan pelaksanaan bagi famili kaedah Gauss-Seidel (GS) dan Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (SOR) bersama konsep lelaran sapuan penuh, separuh dan suku dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang dipertimbangkan. Sejalan dengan usaha mendemonstrasikan keberkesanan ketiga-tiga famili kaedah lelaran yang dipertimbangkan menerusi pendekatan lelaran sapuan penuh, separuh dan suku, tiga contoh bagi setiap permasalahan telah dipertimbangkan. Berdasarkan ujian berangka ke atas ketiga-tiga kaedah tersebut, keputusan menunjukkan bahawa kaedah lelaran AOR adalah paling efisien dari segi bilangan lelaran dan masa lelaran berbanding kaedah GS dan SOR.

Kata Kunci: Min Aritmetik Tak Setempat, Kaedah Lelaran AOR, Masalah Nilai Sempadan Eliptik Tak Linear

ABSTRACT

ACCELERATED OVERRELAXATION ITERATIVE METHOD WITH NONLOCAL FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING NONLINEAR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Numerical solution involving nonlinear elliptic boundary value problems plays the important role to describe various physical problems in sciences, economics and engineering fields which are designed mathematically by using nonlinear equation model. In this study, the use of finite difference discretization schemes for full-, half- and quarter-sweep cases have been considered to discretize the second order nonlinear elliptic boundary value problems. The discretization processes have been implemented over the proposed problems to derive the nonlinear approximation equations for full-, half- and quarter-sweep cases. Then, these nonlinear approximation equations are used to generate the corresponding system of nonlinear equations. Following to that, the system of nonlinear approximation equations needs to transform into the corresponding system of linear equations by using arithmetic mean nonlocal discretization scheme for full-, half- and quarter-sweep iterations. Due to the large scale of the generated linear system, the main objective of this study is to investigate the effectiveness of Accelerated OverRelaxation (AOR) method together with the nonlocal Arithmetic Mean (AM) scheme in solving the system of linear equations. For comparison purposes, this study also considered the formulation and implementation for the family of Gauss-Seidel (GS) and Successive OverRelaxation (SOR) methods applying together with the concept of full-, half- and quarter-sweep iterations in solving the system of linear equations. In addition to that, to illustrate the effectiveness of the full-, half- and quarter-sweep proposed iterative methods, three examples for each proposed problems are considered. Based on numerical experiment towards all those three families, the results show that family of AOR methods are more superior in terms of number of iterations and execution time as compared to the GS and SOR iterative methods.

Keyword: *Nonlocal Arithmetic Mean, AOR iterative Method, Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*

SENARAI KANDUNGAN

	Halaman
TAJUK	i
PENAKUAN	ii
PENGESAHAN	iii
PENGHARGAAN	iv
ABSTRAK	v
<i>ABSTRACT</i>	vi
SENARAI KANDUNGAN	vii
SENARAI JADUAL	xi
SENARAI RAJAH	xii
SENARAI ALGORITMA	xiv
SENARAI SIMBOL	xv
SENARAI SINGKATAN	xvi
BAB 1: PENGENALAN	1
1.1 Pengenalan	1
1.2 Kepelbagaian Persamaan Terbitan	1
1.2.1 Persamaan Terbitan Biasa	2
1.2.2 Persamaan terbitan separa	4
1.3 Masalah Nilai Sempadan Eliptik	7
1.3.1 Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Tak Linear	7
1.3.2 Masalah Nilai Sempadan Eliptik Tak Linear Dua Dimensi	8
1.4 Pemerihalan Konsep Matematik Asas	10
1.4.1 Kembangan Siri Taylor	11
1.4.2 Pemerihalan Norma Vektor Dan Matriks	12
a. Norma Vektor	13
b. Norma Matriks	14
1.5 Pemerihalan Kaedah Beza Terhingga	15
1.5.1 Skema Pendiskretan Beza Terhingga Piawai	16
1.5.2 Skema Pendiskretan Beza Terhingga Tak Piawai	16

1.6	Kepelbagaian Kaedah Penyelesaian	17
1.6.1	Pemerihalan Famili Kaedah Terus	20
1.6.2	Pemerihalan Famili Kaedah Lelaran	21
1.7	Latar Belakang Permasalahan Kajian	23
1.8	Objektif Kajian	27
1.9	Skop Kajian	28
1.10	Organisasi Tesis	30
 BAB 2: ULASAN LITERATUR		 32
2.1	Pengenalan	32
2.2	Kepelbagaian Kaedah Penyelesaian Bagi Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Linear	32
2.3	Perkembangan Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Tak Linear	37
2.4	Perkembangan Masalah Nilai Sempadan Eliptik Tak Linear	41
2.5	Perkembangan Aplikasi Pendekatan Beza Terhingga Tak Setempat	43
2.6	Perkembangan Variasi Kaedah Lelaran	46
2.6.1	Kaedah Lelaran Satu Langkah	47
2.6.2	Kaedah Lelaran Dua Langkah	49
2.7	Asas Kriteria Penumpuan Kaedah Lelaran	52
2.8	Analisis Kadar Penumpuan	55
2.9	Kekompleksan Pengiraan	56
 BAB 3: PERUMUSAN PENDISKRETAN BEZA TERHINGGA TAK SETEMPAT BAGI PERMASALAHAN KAJIAN		 60
3.1	Pengenalan	60
3.2	Pemerihalan Skema Pendiskretan Beza Terhingga	60
3.2.1	Konsep Kembangan Siri Taylor	61
3.2.2	Pemerihalan Pembinaan Rangkaian Grid Terhingga	64
3.3	Pendiskretan Beza Terhingga Tak Setempat Bagi Permasalahan Nilai Sempadan Eliptik Tak Linear	68
3.3.1	Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Bagi Permasalahan Kajian Satu Dimensi	68

3.3.2	Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Bagi Permasalahan Kajian Dua Dimensi	73
a.	Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Sapuan Penuh	73
b.	Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Sapuan Separuh	75
c.	Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Sapuan Suku	77
3.4	Perumusan Kaedah Lelaran Bagi Permasalahan Satu Dimensi	80
3.4.1	Perumusan Skema Famili Kaedah Gauss-Seidel (GS)	80
3.4.2	Perumusan Skema Famili Kaedah SOR	82
3.4.3	Perumusan Skema Famili Kaedah AOR	84
3.5	Pemerihalan Perumusan Kaedah Lelaran Bagi Kes Dua Dimensi	87
3.5.1	Perumusan Skema Famili Kaedah Gauss-Seidel (GS)	87
3.5.2	Perumusan Skema Famili Kaedah SOR	90
3.5.3	Perumusan Skema Famili Kaedah AOR	92
3.6	Rumus Pengiraan Peratusan Penurunan	94
BAB 4:	PENYELESAIAN BERANGKA BAGI MASALAH NILAI	96
	SEMPADAN DUA TITIK TAK LINEAR	
4.1	Pengenalan	96
4.2	Pemerihalan Ujikaji Berangka Bagi Penyelesaian Masalah Nilai Sempadan Dua Titik Tak Linear	96
4.2.1	Pelaksanaan Lelaran Titik Bagi Penyelesaian Beza Terhingga Tak Setempat	97
a.	Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Dengan Famili Kaedah Lelaran GS, SOR dan AOR	98
b.	Keputusan Ujikaji Berangka dan Perbincangan	98
4.2.2	Analisis Kekompleksan Pengiraan	111
4.3	Rumusan Perbandingan Kaedah Lelaran	113

BAB 5: PENYELESAIAN BERANGKA BAGI MASALAH NILAI	115
SEMPADAN ELIPTIK TAK LINEAR DUA DIMENSI	
5.1 Pengenalan	115
5.2 Pemerihalan Ujikaji Berangka Bagi Penyelesaian Beza Terhingga Tak Setempat Ke Atas Masalah Nilai Sempadan Eliptik Tak linear Dua Dimensi	115
5.2.1 Pelaksanaan Lelaran Titik Bagi Penyelesaian Beza Terhingga Tak Setempat	116
a. Persamaan Penghampiran Beza Terhingga Tak Setempat Dengan Famili Kaedah Lelaran GS, SOR dan AOR	116
b. Keputusan Ujikaji dan Perbincangan	117
5.2.2 Analisis Kekompleksan Pengiraan	129
5.3 Rumusan Perbandingan Kaedah Lelaran	132
BAB 6: KESIMPULAN DAN CADANGAN	134
6.1 Rumusan Dapatan Kajian	134
6.2 Sumbangan Kajian	135
6.3 Cadangan Penyelidikan Pada Masa Akan Datang	136
RUJUKAN	138
SENARAI PENERBITAN	159

SENARAI JADUAL

	Halaman
Jadual 4.1: Perbandingan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran GS, SOR Dan AOR ke atas Masalah Ujikaji 4.1	106
Jadual 4.2: Perbandingan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran GS, SOR Dan AOR ke atas Masalah Ujikaji 4.2	107
Jadual 4.3: Perbandingan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran GS, SOR Dan AOR ke atas Masalah Ujikaji 4.3	108
Jadual 4.4: Peratusan Penurunan Bilangan Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran Dibandingkan Dengan Kaedah Lelaran FSGS ke atas Masalah Ujikaji 4.1, 4.2 Dan 4.3	109
Jadual 4.5: Peratusan Penurunan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran Dibandingkan Dengan Kaedah Lelaran FSGS ke atas Masalah Ujikaji 4.1, 4.2 Dan 4.3	109
Jadual 4.6: Bilangan Operasi Aritmetik Per Lelaran Bagi Satu Titik Nod Bagi Famili Kaedah Lelaran Titik ke atas Masalah Ujikaji 4.1, 4.2 Dan 4.3	113
Jadual 5.1: Perbandingan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran GS, SOR Dan AOR ke atas Masalah Ujikaji 5.1	124
Jadual 5.2: Perbandingan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran GS, SOR Dan AOR ke atas Masalah Ujikaji 5.2	125
Jadual 5.3: Perbandingan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran GS, SOR Dan AOR ke atas Masalah Ujikaji 5.3	126
Jadual 5.4: Peratusan Penurunan Bilangan Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran Dibandingkan Dengan Kaedah Lelaran FSGS ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	127
Jadual 5.5: Peratusan Penurunan Masa Lelaran Bagi Famili Kaedah Lelaran Dibandingkan Dengan Kaedah Lelaran FSGS ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	127
Jadual 5.6: Bilangan Operasi Aritmetik Per Lelaran Bagi Satu Titik Nod Bagi Famili Kaedah Lelaran Titik ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	132

SENARAI RAJAH

	Halaman
Rajah 1.1: Kepelbagaian Jenis Kaedah Lelaran	23
Rajah 1.2: Tiga Famili Kaedah Lelaran Dipertimbangkan	27
Rajah 1.3: Ilustrasi Terhadap Skop Kajian	29
Rajah 3.1: Kerangka kerja penyelesaian permasalahan kajian	61
Rajah 3.2: (a), (b) dan (c) Taburan Titik Nod Seragam Pada Domain Penyelesaian Satu Dimensi Bagi Kes Sapuan Penuh, Separuh Dan Suku	65
Rajah 3.3: (a), (b) dan (c) Taburan Titik Nod Seragam Pada Domain Penyelesaian Dua Dimensi Bagi Kes Sapuan Penuh, Separuh Dan Suku Pada $m=8$	67
Rajah 3.4: Molekul Pengiraan Bagi Skema Pendiskretan Tak Setempat Sapuan Penuh	74
Rajah 3.5: Molekul Pengiraan Bagi Skema Pendiskretan Tak Setempat Sapuan Separuh	76
Rajah 3.6: Molekul Pengiraan Bagi Skema Pendiskretan Tak Setempat Sapuan Suku	79
Rajah 4.1: (a), (b) dan (c) Perbandingan Bilangan Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSGS, HSGS Dan QSGS ke atas Masalah Ujikaji 4.1, 4.2 Dan 4.3	100
Rajah 4.2: (a), (b) dan (c) Perbandingan Masa Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSGS, HSGS Dan QSGS ke atas Masalah Ujikaji 4.1, 4.2 Dan 4.3	101
Rajah 4.3: (a), (b) dan (c) perbandingan bilangan lelaran masing-masing ke atas masalah 4.1, 4.2 dan 4.3 bagi kaedah lelaran FSSOR, HSSOR dan QSSOR	102
Rajah 4.4: (a), (b) dan (c) Perbandingan Masa Lelaran (Saat) Masing-Masing ke atas Masalah 4.1, 4.2 Dan 4.3 Bagi Kaedah Lelaran FSSOR, HSSOR Dan QSSOR	103

Rajah 4.5:	(a), (b) dan (c) perbandingan bilangan lelaran bagi kaedah lelaran FSAOR, HSAOR dan QSAOR ke atas masalah ujikaji 4.1, 4.2 dan 4.3	104
Rajah 4.6:	(A), (B) Dan (C) Perbandingan Masa Lelaran (Saat) Masing-Masing ke atas Masalah 4.1, 4.2 Dan 4.3 Bagi Kaedah Lelaran FSAOR, HSAOR Dan QSAOR	105
Rajah 5.1:	(a), (b) dan (c) Perbandingan Bilangan Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSGS, HSGS Dan QSGS ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	118
Rajah 5.2:	(a), (b) dan (c) Perbandingan Masa Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSGS, HSGS Dan QSGS ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	119
Rajah 5.3:	(a), (b) dan (c) Perbandingan Bilangan Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSSOR, HSSOR Dan QSSOR ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	120
Rajah 5.4:	(a), (b) dan (c) menunjukkan perbandingan masa lelaran bagi kaedah lelaran FSSOR, HSSOR dan QSSOR ke atas masalah ujikaji 5.1, 5.2 dan 5.3	121
Rajah 5.5:	(a), (b) dan (c) Perbandingan Bilangan Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSAOR, HSAOR Dan QSAOR ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	111
Rajah 5.6:	(a), (b) dan (c) Perbandingan Masa Lelaran Bagi Kaedah Lelaran FSAOR, HSAOR Dan QSAOR ke atas Masalah Ujikaji 5.1, 5.2 Dan 5.3	112

SENARAI ALGORITMA

	Halaman
Algoritma 3.1: Skema FSGS Bagi Permasalahan Satu Dimensi	81
Algoritma 3.2: Skema HSGS Bagi Permasalahan Satu Dimensi	81
Algoritma 3.3: Skema QSGS Bagi Permasalahan Satu Dimensi	82
Algoritma 3.4: Skema FSSOR Bagi Permasalahan Satu Dimensi	83
Algoritma 3.5: Skema HSSOR Bagi Permasalahan Satu Dimensi	83
Algoritma 3.6: Skema QSSOR Bagi Permasalahan Satu Dimensi	84
Algoritma 3.7: Skema FSAOR Bagi Permasalahan Satu Dimensi	85
Algoritma 3.8: Skema HSAOR Bagi Permasalahan Satu Dimensi	86
Algoritma 3.9: Skema QSAOR Bagi Permasalahan Satu Dimensi	87
Algoritma 3.10: Skema FSGS Bagi Permasalahan Dua Dimensi	88
Algoritma 3.11: Skema HSGS Bagi Permasalahan Dua Dimensi	89
Algoritma 3.12: Skema QSGS Bagi Permasalahan Dua Dimensi	89
Algoritma 3.13: Skema FSSOR Bagi Permasalahan Dua Dimensi	91
Algoritma 3.14: Skema HSSOR Bagi Permasalahan Dua Dimensi	91
Algoritma 3.15: Skema QSSOR Bagi Permasalahan Dua Dimensi	92
Algoritma 3.16: Skema FSAOR Bagi Permasalahan Dua Dimensi	93
Algoritma 3.17: Skema HSAOR Bagi Permasalahan Dua Dimensi	93
Algoritma 3.18: Skema QSAOR Bagi Permasalahan Dua Dimensi	94

SENARAI SIMBOL

- U - Set semesta
- A - Matrik pekali A
- $\|A\|$ - Norma matriks A
- f - Matrik pekali f
- \tilde{f}_i - fungsi tak linear
- h - Saiz bagi subselang
- m - Saiz grid
- U - Matrik pekali U
- $\tilde{U}^{(0)}$ - Vektor ralat awalan
- $\tilde{U}_i^{(k+1)}$ - Mewakili vektor yang tidak diketahui pada lalaran k pada kes satu dimensi
- $U_{i,j}^{(k+1)}$ - Mewakili vektor yang tidak diketahui pada lalaran k pada kes dua dimensi
- $U(a)$ - Sempadan sebelah kiri
- $U(b)$ - Sempadan sebelah kanan
- ω, r - Parameter berpemberat
- x_i - Titik grid
- $m-1$ - Bilangan titik nod terkedalam pada domain penyelesaian
- p - parameter bernilai 1, 2 dan 4 masing-masing merujuk kepada kes sapan penuh, separuh dan suku
- ε - Ralat toleransi untuk criteria penumpuan

SENARAI SINGKATAN

1D	- Satu Dimensi
2D	- Dua Dimensi
ADI	- Tersirat Arah Berselang-Seli
ADM	- Kaedah Penguraian Adomian
AGE	- Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli
AM	- Min Aritmetik
AOR	- Pengenduran Berlebihan Berpecutan
BEM	- Kaedah Unsur Sempadan
BFM	- Kaedah Buckley-Feuring
BTP	- Beza Terhingga Piawai
CRAGE	- Kumpulan Tak Tersirat Berselang-seli Pengurangan Berpasangan
CSS	- Set Penyelesaian Boleh Kawal
EDG	- Kumpulan Tak Tersirat Nyahpasangan
EG	- Kumpulan Tak Tersirat
EGAOR	- Pengenduran Berlebihan Berpecutan Tak Tersirat
EGMSOR	- Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai Kumpulan Tak Tersirat
EGS	- Gauss-Seidel Dieksploitasi
EMA	- Aitken Terubahsuai Dieksploitasi
FEM	- Kaedah Unsur Terhingga
FSAGE	- Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Sapuan Penuh
FSAM	- MIN aritmetik sapuan penuh
FSGS	- Gauss-Seidel Sapuan Penuh
FSSOR	- Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Penuh
FSTAGE	- Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Dua Parameter Sapuan Penuh
FVM	- Kaedah Isipadu Terhingga
GS	- Gauss-Seidel
HSAGE	- Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Sapuan Separuh
HSAM	- Min Aritmetik Sapuan Separuh

- HSGM** - Min Geometrik Sapuan Separuh
- HSGS** - Gauss-Seidel Sapuan Separuh
- HSIADE** - Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli Sapuan Separuh
- HSMSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai Sapuan Separuh
- HSSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Sapuan Separuh
- HSTAGE** - Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Dua Parameter Sapuan Separuh
- IADE** - Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli
- IMGS** - Gauss-Seidel Terubahsuai Diperbaiki
- JOR** - Pengenduran Berlebihan Jacobi
- MEDG** - Kumpulan Tak Tersirat Nyahpasangan Terubahsuai
- MEG** - Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai
- MEGSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai
- MGS** - Gauss-Seidel Terubahsuai
- MPI** - Antara Muka Melintaasi Mesej
- MRS** - Kadar Penggantian Marginal
- MSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai
- ODE** - Persamaan Terbitan Biasa
- PDE** - Persamaan Terbitan Separa
- QSAGE** - Kumpulan Tak Tersirat Berselang-Seli Sapuan Suku
- QSAM** - Min Aritmetik Sapuan Suku
- QSAOR** - Pengenduran Berlebihan Berpecutan Sapuan Suku
- QSGM** - Min Geometrik Sapuan Suku
- QSGS** - Gauss-Seidel Sapuan Suku
- QSIADE** - Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli Sapuan Suku
- QSMSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai Sapuan Suku
- QSTAGE** - Kumpulan Tak Tersirat Berselang-Seli Dua Parameter Sapuan Suku
- RIADE** - Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli Terturun
- SOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut
- SSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Simetri

- USSOR** - Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Tak Simetri
TAGE - Kumpulan Tak Tersirat Berselang-Seli Dua Parameter
WM - Min Berpemberat



UMS
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Masalah nilai sempadan ditakrifkan sebagai syarat sempadan yang muncul tidak lebih dari satu nilai yang tidak bersandar manakala masalah nilai sempadan dua titik pula adalah dua nilai tidak bersandar yang muncul dengan syarat-syarat yang telah dikelaskan. Masalah nilai sempadan dua titik ini pula terbahagi kepada dua iaitu linear dan tidak linear (Gladwell, 2008). Kebelakangan ini, kajian-kajian yang melibatkan analisis berangka dalam konteks permasalahan nilai sempadan khususnya permasalahan eliptik tak linear menunjukkan peningkatan yang mendadak. Kajian tentang fenomena tak linear ini memainkan peranan penting dalam dua bidang terbesar iaitu bidang sains dan kejuruteraan. Hal ini disebabkan banyak permasalahan dalam dunia sebenar boleh diwakilkan dengan menggunakan model matematik.

Hakikatnya, masalah nilai sempadan eliptik tak linear wujud dalam dunia sebenar seperti dalam bidang kejuruteraan bio-medik, ramalan cuaca berangka, perpindahan haba, kejuruteraan seperti pembinaan semula imej, rangkaian komputer, teori lapisan sempadan dalam mekanik bendalir, teori penghantaran kuasa haba, teknologi angkasa dan kinetik tindak balas (Jain, 2008). Justeru, pelbagai contoh permasalahan dalam persamaan terbitan dikemukakan bagi mendapatkan penyelesaian berangka (Karoui dan Vaillancourt, 1995; Peaceman dan Rachford, 1995; Liu *et al.*, 2007; Ran *et al.*, 2008; Gorbunov *et al.*, 2009; Morgado *et al.*, 2013).

1.2 Kepelbagaian Persamaan Terbitan

Persamaan terbitan telah digunakan dalam pelbagai bidang sains dan kejuruteraan sebagai contoh dalam menganggarkan usia fosil, meramal bilangan orang dijangkiti virus dan juga membantu kita untuk memahami kesilapan dalam dunia fizik.

Persamaan yang mempunyai terbitan satu atau lebih pembolehubah bersandar dengan merujuk kepada satu atau lebih pembolehubah yang tidak bersandar adalah dinyatakan sebagai persamaan terbitan (Zill dan Cullen, 2005).

Persamaan terbitan atau persamaan pembezaan adalah sebarang persamaan yang mengandungi terbitan atau pembeza sesuatu fungsi. Persamaan terbitan juga terbahagi kepada beberapa jenis persamaan. Berikut adalah beberapa jenis persamaan terbitan antaranya ialah (Zill dan Cullen, 2005).

- i. persamaan terbitan biasa
- ii. persamaan terbita separa
- iii. persamaan terbitan aljabar
- iv. persamaan terbitan lengah
- v. persamaan terbitan stokastik

Memandangkan dalam kajian ini, permasalahan nilai sempadan dua titik tak linear dan persamaan terbitan separa eliptik tak linear dua dimensi yang dipertimbangkan iaitu dalam kategori persamaan terbitan. Maka, perbincangan selanjutnya cuba difokuskan kepada pemerihalanan persamaan terbitan pada seksyen 1.2.1 dan 1.2.2.

1.2.1 Persamaan Terbitan Biasa

Seperti yang diketahui pada seksyen 1.2, persamaan terbitan terbahagi kepada beberapa jenis antaranya persamaan terbitan biasa iaitu sesuatu persamaan hanya mengandungi terbitan biasa terhadap satu pembolehubah yang bersandar dengan merujuk kepada pembolehubah yang tidak bersandar tunggal. Dalam erti kata lain, ia boleh di definisikan sebagai fungsi yang tidak diketahui nilainya berada dalam persamaan yang bergantung kepada satu pembolehubah yang tidak bersandar (Rice dan Strange, 1994).

Satu pembolehubah yang nyata x adalah berhubung dengan pembolehubah bersandar y , dan beberapa terbitannya iaitu $y', y'', \dots, y^{(n)}$ dengan semua terbitan ini diterbitkan terhadap x adalah dipanggil sebagai persamaan terbitan biasa. Umumnya, persamaan terbitan biasa linear pada n tertib adalah seperti berikut (Zill dan Cullen, 2005):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

dengan F adalah fungsi nilai yang nyata dari pembolehubah-pembolehubah $n + 2$ iaitu $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Anggapan yang mungkin dinyatakan bagi menyelesaikan masalah terbitan biasa dalam bentuk persamaan (1.1) adalah untuk terbitan $y^{(n)}$ yang tertinggi yang bermaksud bahawa persamaan terbitan peringkat ke n dengan mengandungi pembolehubah-pembolehubah $n + 1$ yang dinyatakan adalah sebagai

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.2)$$

dengan f adalah fungsi yang diketahui terhadap pembolehubah $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Di samping itu, persamaan terbitan biasa juga terbahagi kepada dua kes iaitu linear dan tidak linear. dengan berpandukan kepada persamaan terbitan biasa dengan peringkat atau tertib ke n dalam persamaan (1.2) yang linear secara umumnya dapat dinyatakan sebagai

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = r(x) \quad (1.3)$$

dengan $a_j(x), 0 \leq j \leq n$ adalah fungsi terhadap pembolehubah x yang disebut pekali persamaan. Anggapan $a_0(x) \neq 0$ dalam apa jua bentuk selang di mana persamaan adalah ditentukan. Jika $r(x) = 0$, pada persamaan (1.3) adalah disebut persamaan homogen dan sebaliknya dikatakan persamaan bukan homogen.

Dalam gabungan operasi tambah sebelah kiri bagi sebutan-sebutan persamaan (1.3), diketahui bahawa terdapat dua sifat persamaan terbitan biasa tersebut iaitu pembolehubah yang bersandar y dan semua terbitannya $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ adalah berdarjah satu, sementara pekali a_0, a_1, \dots, a_n , bagi sebutan $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ yang sepadan adalah bergantung kepada pembolehubah tidak bersandar x .

Manakala dalam konteks persamaan terbitan biasa tidak linear pula, fungsi tidak linear daripada pembolehubah bersandar atau terbitannya seperti $\sin y$ dan $e^{y'}$ tidak boleh hadir dalam bentuk linear. Oleh itu, berikut adalah beberapa contoh persamaan terbitan biasa tidak linear:

$$(1 - y)y' + 2y = e^{x'} \tag{1.4a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0, \tag{1.4b}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0. \tag{1.4c}$$

Persamaan (1.4a), dikatakan tidak linear apabila pekali yang bergantung kepada y' iaitu $(1 - y)$ yang muncul dalam persamaan adalah fungsi terhadap y . Justeru itu, persamaan (1.4a) ini dikenali sebagai persamaan terbitan biasa tidak linear peringkat pertama. Begitu juga dengan persamaan (1.4b) adalah tidak linear bagi persamaan terbitan peringkat kedua kerana mengandungi sebutan $\sin y$ dalam persamaan. Seterusnya persamaan (1.4c) pula dikatakan tidak linear kerana terdapat sebutan yang merujuk kepada kuasa lebih daripada satu iaitu y^2 dalam persamaan (1.4c) yang dikenali sebagai persamaan terbitan biasa peringkat keempat tidak linear (Zill dan Cullen, 2005).

1.2.2 Persamaan terbitan separa

Secara umumnya, persamaan terbitan separa pula digunakan bagi menyelesaikan masalah dalam bidang sains dan kejuruteraan yang berkenaan dengan ruang multi dimensi. Persamaan yang melibatkan satu atau banyak terbitan separa daripada

fungsi yang tidak diketahui oleh beberapa pembolehubah adalah dipanggil sebagai persamaan terbitan separa (Rice dan Strange, 1994). Secara lazimnya, persamaan terbitan separa ini boleh dikategorikan kepada tiga famili utama iaitu persamaan terbitan separa parabolik, eliptik dan hiperbolik. Berikut adalah sebahagian daripada contoh bagi persamaan terbitan separa:

i. Persamaan terbitan parabolik

Persamaan haba adalah salah satu daripada persamaan terbitan parabolik dan berikut adalah contoh bagi linear peringkat kedua parabolik bagi persamaan terbitan separa adalah seperti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.5a)$$

dengan K adalah penyerapan termal.

ii. Persamaan terbitan eliptik

Persamaan terbitan eliptik dikenali sebagai keadaan yang stabil dan berikut adalah salah satu contoh persamaan eliptik iaitu persamaan Poisson dalam bentuk umum adalah seperti berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1.5b)$$

iii. Persamaan terbitan hiperbolik

Persamaan gelombang adalah sebahagian persamaan terbitan hiperbolik adalah dinyatakan seperti berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.5c)$$

dengan c adalah kelajuan bagi cahaya.