KAEDAH LELARAN PENGENDURAN BERLEBIHAN BERPECUTAN DENGAN SKEMA BEZA TERHINGGA TAK SETEMPAT KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN ELIPTIK TAK LINEAR

MOHD USRAN BIN ALIBUBIN

FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH
2016

KAEDAH LELARAN PENGENDURAN BERLEBIHAN BERPECUTAN DENGAN SKEMA BEZA TERHINGGA TAK SETEMPAT KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN ELIPTIK TAK LINEAR

MOHD USRAN BIN ALIBUBIN

TESIS YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA

FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH
2016

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

06 Disember 2016

Mohd Usran Bin Alibubin
MS 1411017T

PENGESAHAN

NAMA	:	**MOHD USRAN BIN ALIBUBIN**
NO. MATRIKS	:	**MS 1411017T**
TAJUK	:	**KAEDAH LELARAN PENGENDURAN BERLEBIHAN BERPECUTAN DENGAN SKEMA BEZA TERHINGGA TAK SETEMPAT KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN ELIPTIK TAK LINEAR**
Ijazah	:	**SARJANA SAINS (MATEMATIK)**
VIVA DATE	:	**20 OKTOBER 2016**

DISAHKAN OLEH;

1. PENYELIA

Prof Madya Dr. Jumat Sulaiman Tandatangan

PENGHARGAAN

Segala puji ke atas Allah S.W.T, pemilik segala ilmu pengetahuan dan rahsia segenap pelusuk alam. Selawat dan salam ke atas junjungan Nabi Muhammad S.A.W yang telah diutuskan sebagaimana rahmat untuk sekalian alam, juga ke atas keluarganya, para sahabat dan sekalian yang berjuang di atas nama Ilahi.

Saya ingin mengambil kesempatan untuk mengucapkan jutaan terima kasih kepada penyelia saya Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman atas semua nasihat, tunjuk ajar, doa, galakan, kesabaran dan penyuntingan dalam usaha untuk menyiapkan tesis ini. Pandangan dan idea beliau memberi impak yang luar biasa terhadap keseluruhan tesis ini.

Setinggi-tinggi penghargaan dan terima kasih buat ibu dan bapa serta ahli keluarga atas galakan, nasihat, bimbingan serta bantuan dari segi kewangan sepanjang pengajian dan penulisan tesis ini. Selain itu, saya ingin berterima kasih kepada abang Majid Khan Majahar Ali, Kamarulzaman Md Akhir di atas nasihat, tunjuk ajar dan dorongan mereka yang tiada nilainya. Buat teman-teman seperjuangan yang sentiasa bersama Mohd Zaidey Sani, Asnawi Ahmad, Supardie Roland, Imran Daling, Mohd Azam Ab Gani, Lawrance Anak Bansa dan semua rakan-rakan yang memberi sokongan moral dalam menyiapkan tesis ini.

Saya juga ingin merakamkan ucapan terima kasih kepada pensyarah-pensyarah Universiti Sabah Malaysia khususnya dari Fakulti Sains dan Sumber Alam yang telah memberikan semangat dan terlibat secara langsung mahupun tidak dan semua pihak yang turut membantu ke arah kejayaan pengajian penulis. Semoga bantuan mereka akan menjadi amal di sisi Allah S.W.T.

Mohd Usran bin Alibubin
Mei 2016

ABSTRAK

Penyelesaian berangka yang melibatkan masalah nilai sempadan eliptik tak linear memainkan peranan yang penting untuk menggambarkan pelbagai permasalahan fizikal dalam bidang sains, ekonomi dan bidang kejuruteraan yang dibentangkan secara matematik dengan menggunakan model persamaan tak linear. Dalam kajian ini, penggunaan skema pendiskretan beza terhingga bagi kes sapuan penuh, separuh dan suku telah dipertimbangkan untuk mendiskretkan masalah nilai sempadan eliptik tak linear. Proses pendiskretan telah dilaksanakan ke atas permasalahan yang dipertimbangkan untuk menerbitkan persamaan penghampiran tak linear bagi kes sapuan penuh, separuh dan suku. Selanjutnya, persamaan penghampiran tak linear tersebut pula digunakan untuk menjanakan sistem persamaan penghampiran tak linear yang sepadan. Seterusnya, sistem persamaan penghampiraan tak linear tersebut perlu diubah kepada sistem persamaan linear yang sepadan dengan menggunakan skema pendiskretan min aritmetik tak setempat sapuan penuh, separuh dan suku. Oleh kerana sistem persamaan linear yang dijanakan berskala besar, maka objektif utama kajian ini adalah untuk menganalisis keberkesanan kaedah lelaran Berpecutan Berpemberat (AOR) bersama dengan skema min aritmetik tak setempat dalam menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut. Bagi tujuan perbandingan, kajian ini memperihalkan perumusan dan pelaksanaan bagi famili kaedah Gauss-Seidel (GS) dan Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (SOR) bersama konsep lelaran sapuan penuh, separuh dan suku dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang dipertimbangkan. Sejajar dengan usaha mendemonstrasikan keberkesanan ketiga-tiga famili kaedah lelaran yang dipertimbangkan menerusi pendekatan lelaran sapuan penuh, separuh dan suku, tiga contoh bagi setiap permasalahan telah dipertimbangkan. Berdasarkan ujian berangka ke atas ketiga-tiga kaedah tersebut, keputusan menunjukkan bahawa kaedah lelaran AOR adalah paling efisien dari segi bilangan lelaran dan masa lelaran berbanding kaedah GS dan SOR.

Kata Kunci: Min Aritmetik Tak Setempat, Kaedah Lelaran AOR, Masalah Nilai Sempadan Eliptik Tak Linear

ABSTRACT

ACCELARETED OVERRELAXATION ITERATIVE METHOD WITH NONLOCAL FINTE DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING NONLINEAR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Numerical solution involving nonlinear elliptic boundary value problems plays the important role to describe various physical problems in sciences, economics and engineering fields which are designed mathematically by using nonlinear equation model. In this study, the use of finite difference discretization schemes for full-, half- and quarter-sweep cases have been considered to discretize the second order nonlinear elliptic boundary value problems. The discretization processes have been implemented over the proposed problems to derive the nonlinear approximation equations for full-, half- and quarter-sweep cases. Then, these nonlinear approximation equations are used to generate the corresponding system of nonlinear equations. Following to that, the system of nonlinear approximation equations needs to transform into the corresponding system of linear equations by using arithmetic mean nonlocal discretization scheme for full-, half- and quarter-sweep iterations. Due to the large scale of the generated linear system, the main objective of this study is to investigate the effectiveness of Accelerated OverRelaxation (AOR) method together with the nonlocal Arithmetic Mean (AM) scheme in solving the system of linear equations. For comparison purposes, this study also considered the formulation and implementation for the family of Gauss-Seidel (GS) and Successive OverRelaxation (SOR) methods applying together with the concept of full-, half- and quarter-sweep iterations in solving the system of linear equations. In addition to that, to illustrate the effectiveness of the full-, half- and quarter-sweep proposed iterative methods, three examples for each proposed problems are considered. Based on numerical experiment towards all those three families, the results show that family of AOR methods are more superior in terms of number of iterations and execution time as compared to the GS and SOR iterative methods.

Keyword: *Nonlocal Arithmetic Mean, AOR iterative Method, Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*

SENARAI KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

Halaman

SENARAI RAJAH

SENARAI ALGORITMA

SENARAI SIMBOL

U	- Set semesta
A	- Matrik pekali A
$\|A\|$	- Norma matriks A
$\underset{\sim}{f}$	- Matrik pekali f
f_i	- fungsi tak linear
h	- Saiz bagi subselang
m	- Saiz grid
$\underset{\sim}{U}$	- Matrik pekali U
$\underset{\sim}{U}^{(0)}$	- Vektor ralat awalan
$U_i^{(k+1)}$	- Mewakili vektor yang tidak diketahui pada lelaran k pada kes satu dimensi
$U_{i,j}^{(k+1)}$	- Mewakili vektor yang tidak diketahui pada lelaran k pada kes dua dimensi
$U(a)$	- Sempadan sebelah kiri
$U(b)$	- Sempadan sebelah kanan
ω, r	- Parameter berpemberat
x_i	- Titik grid
$m-1$	- Bilangan titik nod terkedalam pada domain penyelesaian
p	- parameter bernilai 1, 2 dan 4 masing-masing merujuk kepada kes sapuan penuh, separuh dan suku
ε	- Ralat toleransi untuk criteria penumpuan

SENARAI SINGKATAN

1D	-	Satu Dimensi
2D	-	Dua Dimensi
ADI	-	Tersirat Arah Berselang-Seli
ADM	-	Kaedah Penguraian Adomian
AGE	-	Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli
AM	-	Min Aritmetik
AOR	-	Pengenduran Berlebihan Berpecutan
BEM	-	Kaedah Unsur Sempadan
BFM	-	Kaedah Buckley-Feuring
BTP	-	Beza Terhingga Piawai
CRAGE	-	Kumpulan Tak Tersirat Berselang-seli Pengurangan Berpasangan
CSS	-	Set Penyeleseaian Boleh Kawal
EDG	-	Kumpulan Tak Tersirat Nyahpasangan
EG	-	Kumpulan Tak Tersirat
EGAOR	-	Pengenduran Berlebihan Berpecutan Tak Tersirat
EGMSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai Kumpulan Tak Tersirat
EGS	-	Gauss-Seidel Dieksploitasi
EMA	-	Aitken Terubahsuai Dieksploitasi
FEM	-	Kaedah Unsur Terhingga
FSAGE	-	Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Sapuan Penuh
FSAM	-	MIN aritmetik sapuan penuh
FSGS	-	Gauss-Seidel Sapuan Penuh
FSSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Penuh
FSTAGE	-	Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Dua Parameter Sapuan Penuh
FVM	-	Kaedah Isipadu Terhingga
GS	-	Gauss-Seidel
HSAGE	-	Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Sapuan Separuh
HSAM	-	Min Aritmetik Sapuan Separuh

HSGM	-	Min Geometrik Sapuan Separuh
HSGS	-	Gauss-Seidel Sapuan Separuh
HSIADE	-	Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli Sapuan Separuh
HSMSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai Sapuan Separuh
HSSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Sapuan Separuh
HSTAGE	-	Tak Tersirat Kumpulan Berselang-Seli Dua Parameter Sapuan Separuh
IADE	-	Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli
IMGS	-	Gauss-Seidel Terubahsuai Diperbaiki
JOR	-	Pengenduran Berlebihan Jacobi
MEDG	-	Kumpulan Tak Tersirat Nyahpasangan Terubahsuai
MEG	-	Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai
MEGSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Kumpulan Tak Tersirat Terubahsuai
MGS	-	Gauss-Seidel Terubahsuai
MPI	-	Antara Muka Melintaasi Mesej
MRS	-	Kadar Penggantian Marginal
MSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai
ODE	-	Persamaan Terbitan Biasa
PDE	-	Persamaan Terbitan Separa
QSAGE	-	Kumpulan Tak Tersirat Berselang-Seli Sapuan Suku
QSAM	-	Min Aritmetik Sapuan Suku
QSAOR	-	Pengenduran Berlebihan Berpecutan Sapuan Suku
QSGM	-	Min Geometrik Sapuan Suku
QSGS	-	Gauss-Seidel Sapuan Suku
QSIADE	-	Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli Sapuan Suku
QSMSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Terubahsuai Sapuan Suku
QSTAGE	-	Kumpulan Tak Tersirat Berselang-Seli Dua Parameter Sapuan Suku
RIADE	-	Tak Tersirat Penguraian Berselang-Seli Terturun
SOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut
SSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Simetri

USSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Tak Simetri
TAGE	-	Kumpulan Tak Tersirat Berselang-Seli Dua Parameter
WM	-	Min Berpemberat

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Masalah nilai sempadan ditakrifkan sebagai syarat sempadan yang muncul tidak lebih dari satu nilai yang tidak bersandar manakala masalah nilai sempadan dua titik pula adalah dua nilai tidak bersandar yang muncul dengan syarat-syarat yang telah dikelaskan. Masalah nilai sempadan dua titik ini pula terbahagi kepada dua iaitu linear dan tidak linear (Gladwell, 2008). Kebelakangan ini, kajian-kajian yang melibatkan analisis berangka dalam konteks permasalahan nilai sempadan khususnya permasalahan eliptik tak linear menunjukkan peningkatan yang mendadak. Kajian tentang fenomena tak linear ini memainkan peranan penting dalam dua bidang terbesar iaitu bidang sains dan kejuruteraan. Hal ini disebabkan banyak permasalahan dalam dunia sebenar boleh diwakilkan dengan menggunakan model matematik.

Hakikatnya, masalah nilai sempadan eliptik tak linear wujud dalam dunia sebenar seperti dalam bidang kejuruteraan bio-medik, ramalan cuaca berangka, perpindahan haba, kejuruteraan seperti pembinan semula imej, rangkaian komputer, teori lapisan sempadan dalam mekanik bendalir, teori penghantaran kuasa haba, teknologi angkasa dan kinetik tindak balas (Jain, 2008). Justeru, pelbagai contoh permasalahan dalam persamaan terbitan dikemukakan bagi mendapatkan penyelesaian berangka (Karoui dan Vaillancourt, 1995; Peaceman dan Rachford, 1995; Liu *et al.*, 2007; Ran *et al.*, 2008; Gorbunov *et al.*, 2009; Morgado *et al.*, 2013).

1.2 Kepelbagaian Persamaan Terbitan

Persamaan terbitan telah digunakan dalam pelbagai bidang sains dan kejuruteraan sebagai contoh dalam menganggarkan usia fosil, meramal bilangan orang dijangkiti virus dan juga membantu kita untuk memahami kesilapan dalam dunia fizik.

Persamaan yang mempunyai terbitan satu atau lebih pembolehubah bersandar dengan merujuk kepada satu atau lebih pembolehubah yang tidak bersandar adalah dinyatakan sebagai persamaan terbitan (Zill dan Cullen, 2005).

Persamaan terbitan atau persamaan pembezaan adalah sebarang persamaan yang mengandungi terbitan atau pembeza sesuatu fungsi. Persamaan terbitan juga terbahagi kepada beberapa jenis persamaan. Berikut adalah beberapa jenis persamaan terbitan antaranya ialah (Zill dan Cullen, 2005).

i. persamaan terbitan biasa
ii. persamaan terbita separa
iii. persamaan terbitan aljabar
iv. persamaan terbitan lengah
v. persamaan terbitan stokastik

Memandangkan dalam kajian ini, permasalahan nilai sempadan dua titik tak linear dan persamaan terbitan separa eliptik tak linear dua dimensi yang dipertimbangkan iaitu dalam kategori persamaan terbitan. Maka, perbincangan selanjutnya cuba difokuskan kepada pemerihalan persamaan terbitan pada seksyen 1.2.1 dan 1.2.2.

1.2.1 Persamaan Terbitan Biasa

Seperti yang diketahui pada seksyen 1.2, persamaan terbitan terbahagi kepada beberapa jenis antaranya persamaan terbitan biasa iaitu sesuatu persamaan hanya mengandungi terbitan biasa terhadap satu pembolehubah yang bersandar dengan merujuk kepada pembolehubah yang tidak bersandar tunggal. Dalam erti kata lain, ia boleh di definisikan sebagai fungsi yang tidak diketahui nilainya berada dalam persamaan yang bergantung kepada satu pembolehubah yang tidak bersandar (Rice dan Strange, 1994).

Satu pembolehubah yang nyata x adalah berhubung dengan pembolehubah bersandar y, dan beberapa terbitannya iaitu $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ dengan semua terbitan ini diterbitkan terhadap x adalah dipanggil sebagai persamaan terbitan biasa. Umumnya, persamaan terbitan biasa linear pada n tertib adalah seperti berikut (Zill dan Cullen, 2005):

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

dengan F adalah fungsi nilai yang nyata dari pembolehubah-pembolehubah $n+2$ iaitu $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Anggapan yang mungkin dinyatakan bagi menyelesaikan masalah terbitan biasa dalam bentuk persamaan (1.1) adalah untuk terbitan $y^{(n)}$ yang tertinggi yang bermaksud bahawa persamaan terbitan peringkat ke n dengan mengandungi pembolehubah-pembolehubah $n+1$ yang dinyatakan adalah sebagai

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

dengan f adalah fungsi yang diketahui terhadap pembolehubah $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Di samping itu, persamaan terbitan biasa juga terbahagi kepada dua kes iaitu linear dan tidak linear. dengan berpandukan kepada persamaan terbitan biasa dengan peringkat atau tertib ke n dalam persamaan (1.2) yang linear secara umumnya dapat dinyatakan sebagai

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = r(x) \tag{1.3}$$

dengan $a_j(x), 0 \leq j \leq n$ adalah fungsi terhadap pembolehubah x yang disebut pekali persamaan. Anggapan $a_0(x) \neq 0$ dalam apa jua bentuk selang di mana persamaan adalah ditentukan. Jika $r(x) = 0$, pada persamaan (1.3) adalah disebut persamaan homogen dan sebaliknya dikatakan persamaan bukan homogen.

Dalam gabungan operasi tambah sebelah kiri bagi sebutan-sebutan persamaan (1.3), diketahui bahawa terdapat dua sifat persamaan terbitan biasa tersebut iaitu pembolehubah yang bersandar y dan semua terbitannya $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ adalah berdarjah satu, sementara pekali $a_0, a_1, \ldots, a_n,$ bagi sebutan $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ yang sepadan adalah bergantung kepada pembolehubah tidak bersandar x.

Manakala dalam konteks persamaan terbitan biasa tidak linear pula, fungsi tidak linear daripada pembolehubah bersandar atau terbitannya seperti $\sin y$ dan $e^{y'}$ tidak boleh hadir dalam bentuk linear. Oleh itu, berikut adalah beberapa contoh persamaan terbitan biasa tidak linear:

$$(1-y)y' + 2y = e^{x'}, \tag{1.4a}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y = 0, \tag{1.4b}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + y^2 = 0\,. \tag{1.4c}$$

Persamaan (1.4a), dikatakan tidak linear apabila pekali yang bergantung kepada y' iaitu $(1-y)$ yang muncul dalam persamaan adalah fungsi terhadap y. Justeru itu, persamaan (1.4a) ini dikenali sebagai persamaan terbitan biasa tidak linear peringkat pertama. Begitu juga dengan persamaan (1.4b) adalah tidak linear bagi persamaan terbitan peringkat kedua kerana mengandungi sebutan $\sin y$ dalam persamaan. Seterusnya persamaan (1.4c) pula dikatakan tidak linear kerana terdapat sebutan yang merujuk kepada kuasa lebih daripada satu iaitu y^2 dalam persamaan (1.4c) yang dikenali sebagai persamaan terbitan biasa peringkat keempat tidak linear (Zill dan Cullen, 2005).

1.2.2 Persamaan terbitan separa

Secara umumnya, persamaan terbitan separa pula digunakan bagi menyelesaikan masalah dalam bidang sains dan kejuruteran yang berkenaan dengan ruang multi dimensi. Persamaan yang melibatkan satu atau banyak terbitan separa daripada fungsi yang tidak diketahui oleh beberapa pembolehubah adalah dipanggil sebagai persamaan terbitan separa (Rice dan Strange, 1994). Secara lazimnya, persamaan terbitan separa ini boleh dikategorikan kepada tiga famili utama iaitu persamaan terbitan separa parabolik, eliptik dan hiperbolik. Berikut adalah sebahagian daripada contoh bagi persamaan terbitan separa:

i. Persamaan terbitan parabolik

Persamaan haba adalah salah satu daripada persamaan terbitan parabolik dan berikut adalah contoh bagi linear peringkat kedua parabolik bagi persamaan terbitan separa adalah seperti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.5a}$$

dengan K adalah penyerapan termal.

ii. Persamaan terbitan eliptik

Persamaan terbitan eliptik dikenali sebagai keadaan yang stabil dan berikut adalah salah satu contoh persamaan eliptik iaitu persamaan Poisson dalam bentuk umum adalah seperti berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1.5b}$$

iii. Persamaan terbitan hiperbolik

Persamaan gelombang adalah sebahagian persamaan terbitan hiperbolik adalah dinyatakan seperti berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.5c}$$

dengan c adalah kelajuan bagi cahaya.