KEEFISIENAN PENGIRAAN BAGI FAMILI KAEDAH LELARAN BLOK SOR DENGAN SKEMA PENDISKRETAN BEZA TERHINGGA CAPUTO KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK PERINGKAT PECAHAN

ROSTANG BIN RAHMAN

FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

2020

KEEFISIENAN PENGIRAAN BAGI FAMILI KAEDAH LELARAN BLOK SOR DENGAN SKEMA PENDISKRETAN BEZA TERHINGGA CAPUTO KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK PERINGKAT PECAHAN

ROSTANG BIN RAHMAN

TESIS INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH SARJANA SAINS

FAKULTI SAINS DAN SUMBER ALAM
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH
2020

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN TESIS

JUDUL : ____
____
____

IJAZAH : ____
____

SAYA : ______________________________________ **SESI PENGAJIAN** : __________________________________
(HURUF BESAR)

Mengaku membenarkan tesis *(LPSM/Sarjana/Doktor Falsafah) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hak milik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

[ ] SULIT (Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di AKTA RAHSIA RASMI 1972)

[ ] TERHAD (Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)

[ ] TIDAK TERHAD

Disahkan oleh:

_____________________ (TANDATANGAN PENULIS)

_________________________ (TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: ________________
____
____
____

_________________________ (NAMA PENYELIA)

TARIKH: ______________

TARIKH: ___________________

Catatan:
*Potong yang tidak berkenaan.
*Jika tesis ini SULIT dan TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa/organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.
*Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana Secara Penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

18 Februari 2020

ROSTANG BIN RAHMAN
MS1721054T

PENGESAHAN

NAMA	:	**ROSTANG BIN RAHMAN**
NO MATRIK	:	**MS1721054T**
TAJUK	:	**KEEFISIENAN PENGIRAAN BAGI FAMILI KAEDAH LELARAN BLOK SOR DENGAN SKEMA PENDISKRETAN BEZA TERHINGGA CAPUTO KE ATAS MASALAH NILAI SEMPADAN DUA TITIK PERINGKAT PECAHAN**
IJAZAH	:	**SARJANA SAINS**
BIDANG	:	**MATEMATIK**
TARIKH VIVA	:	**29 NOVEMBER 2019**

DISAHKAN OLEH;

PENYELIAAN TUNGGAL

PENYELIA Tandatangan

Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman _______________

PENGHARGAAN

Terlebih dahulu saya panjatkan kesyukuran kepada Allah S.W.T kerana dengan limpah dan kurnianya, akhirnya saya dapat menyiapkan tesis ini dengan jayanya. Saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih dan setinggi-tinggi penghargaan kepada semua pihak yang telah menjadi tulang belakang sepanjang saya menyiapkan kajian ini.

Penghargaan yang tidak terhingga kepada penyelia utama saya iaitu Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman yang sudi memberi tunjuk ajar dan bimbingan selain banyak memberi sokongan dan motivasi sepanjang menyiapkan kajian ini.

Di samping itu, sekalung terima kasih diucapkan kepada ahli keluarga saya terutamanya ayahanda saya Rahman Bundu dan ibunda Samsuria Abdul Yusup yang telah menyediakan segala keperluan bagi memudahkan saya menyiapkan kajian ini serta memberikan sokongan dan motivasi.

Saya ingin merakamkan setinggi-tinggi penghargaan kepada rakan-rakan seperjuangan saya iaitu Eng Jeng Hong, Nur Afza Mat Ali, Nur Farah Azira, Labiyana, Nurasyidah, Nurul Afiqah Basran dan Mohd Norfadli Suardi kerana telah memberi tunjuk ajar dan sanggup membantu terutama ketika menghadapi kesulitan sepanjang kajian ini. Tidak lupa juga penghargaan kepada pihak UMS kerana telah memberi geran penyelidikan iaitu UMSGreat GUG0227-1/2018. Segala jasa baik yang telah dicurahkan adalah sangat dihargai dan akan dikenang selamanya.

Tanpa sokongan dan pertolongan daripada semua pihak dalam mengatasi semua cabaran dan rintangan ini maka tidak sempurnalah kajian ini.

ROSTANG RAHMAN
18 Februari 2020

ABSTRAK

Persamaan terbitan biasa peringkat pecahan telah menjadi tumpuan di kalangan penyelidik untuk memperihalkan pelbagai masalah yang berkaitan dengan sains, ekonomi dan kejuruteraan. Oleh itu, permasalahan yang dipertimbangkan dalam kajian ini adalah masalah nilai sempadan dua titik peringkat pecahan menerusi persamaan terbitan biasa pecahan-tunggal dan ganda-dua. Untuk menyelesaikan permasalahan kajian yang dipertimbangkan, terdapat beberapa kaedah berangka yang telah digunakan berdasarkan kajian sebelum ini seperti kaedah unsur terhingga, kaedah beza terhingga, dan kaedah isi padu terhingga. Berpandukan kepada sorotan kajian terdahulu, kaedah beza terhingga merupakan salah satu kaedah seringkali digunakan dalam kaedah berangka untuk menyelesaikan permasalahan persamaan terbitan biasa peringkat pecahan. Justeru itu, permasalahan kajian ini telah didiskretkan dengan menggunakan kaedah beza terhingga dan skema pengoperasi terbitan Caputo untuk mendapatkan persamaan penghampiran beza terhingga Caputo yang sepadan bagi kes sapuan penuh, separuh, dan suku dan kemudiannya membentuk sistem persamaan linear yang sepadan. Seterusnya ciri-ciri matriks pekali bagi sistem persamaan linear yang telah dibentuk adalah bersifat jarang dan berskala besar. Untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi sistem linear tersebut, kaedah lelaran dipertimbangkan sebagai kaedah penyelesaian yang mana kaedah yang dipertimbangkan ialah famili kaedah lelaran Gauss-Seidel (GS), kaedah lelaran titik pengenduran berlebihan berturut-turut (SOR), dan kaedah lelaran blok khususnya 4-titik Kumpulan Tak Tersirat pengenduran berlebihan berturut-turut (4EGSOR) dan dilaksanakan bersama-sama dengan pendekatan konsep sapuan penuh, separuh dan suku. Sejajar dengan usaha untuk mendemonstrasikan kecekapan pengiraan bagi ketiga-tiga famili kaedah lelaran tersebut, tiga contoh permasalahan kajian bagi setiap persamaan terbitan biasa peringkat pecahan yang telah dipertimbangkan. Berdasarkan keputusan ujian berangka yang diperolehi telah menunjukkan bahawa kaedah lelaran blok merupakan kaedah lelaran yang lebih cekap berbanding dengan kaedah lelaran titik apabila kriteria bilangan lelaran dan masa lelaran dipertimbangkan. Seterusnya, keputusan berangka bagi ketiga-tiga kaedah lelaran sapuan tersebut telah menunjukkan bahawa pelaksanaan kaedah lelaran sapuan suku (QS) merupakan kaedah lelaran yang lebih cekap berbanding dengan kaedah lelaran sapuan penuh (FS) dan sapuan separuh (HS) dalam menyelesaikan kedua-dua permasalahan persamaan terbitan biasa tersebut. Walau bagaimanapun, secara keseluruhannya kaedah lelaran QS4EGSOR adalah yang lebih cekap dari segi bilangan dan masa lelaran dalam menyelesaikan permasalahan persamaan terbitan biasa pecahan-tunggal dan pecahan-ganda dua.

ABSTRACT

EFFICIENCY OF CALCULATION FAMILY BLOCK SOR ITERATIVE METHOD WITH CAPUTO'S SCHEME TO SOLVE THE FRACTIONAL TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS

The ordinary differential equation has become a focus among researchers to explain various problems related to science, economics and engineering. Therefore, the problems considered in this study are the fractional order two-point boundary value problem via the single-fractional and double-fractional ordinary differential equation. To solve these problems being considered, there are several methods that have been used based on previous studies such as the finite element method, finite difference method, and finite volume method. Based on the previous studies, finite difference method is one of the most frequently used in numerical methods to solve the fractional order ordinary differential equation problems. Because of that, the proposed problems of this study have been discretized by using the finite different method together with the Caputo's derivative operator scheme to generate the corresponding Caputo finite difference approximation equations in cases of full-, half- and quarter-sweep through then to form the corresponding linear system. Furthermore, the characteristics of the coefficient matrix of the linear system has large scale and sparse. In order to obtain an approximation of the solution linear systems, iterative methods have been considered as a linear solver where the iterative method considered namely the family of Gauss-Seidel (GS) iterative methods, family of Successive Over Relaxation (SOR) iterative methods and family of 4-point Explicit Group Successive Over Relaxation (4EGSOR) iterative methods in which these iterative families have been also implemented together with the concept of full-, half- and quarter-sweep iteration. In order to demonstrate the computational efficiency of the family iterative methods, three examples of proposed problems for each differential equation have been considered. Based on the numerical results obtained, it has been shown that the block iterative methods are more efficient than the point iterative methods in terms of the number of iterations and computational time. Furthermore, numerical results for these three sweep iterative nethods have shown that the implementation of the quarter-sweep (QS) iterative method is the most efficient iterative method as compared with the full-sweep (FS) and halfway (HS) iterative methods in solving both ordinary differential equations. Based on the numerical result, we can conclude the QS4EGSOR iterative method is the most efficient iterative method in terms of the number iterations and computational time in solving the single-fractional and double-fractional ordinary differential equations.

SENARAI KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI SINGKATAN

AOR	-	Pengenduran Penguraian Adomian
CFDTM	-	Kaedah Terbitan Transformasi Pecahan Yang konformasi
EG	-	Kumpulan Tak Tersirat
EGSOR	-	Kumpulan Tak-tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-turut
FEM	-	Kaedah Unsur Terhingga
FDM	-	Kaedah Beza Terhingga
FVM	-	Kaedah Isi padu Terhingga
FSGS	-	Gauss-Seidel Sapuan Penuh
FSSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Penuh
FS4EGSOR	-	4-titik Kumpulan Tak-tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Penuh
GS	-	Gauss-Seidel
HSGS	-	Gauss-Seidel Sapuan Separuh
HSSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Separuh
HS4EGSOR	-	4-titik Kumpulan Tak-tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Separuh
KBT	-	kaedah Beza Terhingga
KSOR	-	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Kaudd
PTB	-	Persamaan Terbitan Biasa
PTBPT	-	Persamaan Terbitan Biasa Pecahan-tunggal
PTBPGD	-	Persamaan Terbitan Biasa Pecahan-ganda Dua
QSGS	-	Gauss-Seidel Sapuan Suku
QSSOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Suku
QS4EGSOR	-	4-titik Kumpulan Tak-tersirat Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Sapuan Suku
SOR	-	Pengenduran Berlebihan Berturut-turut

SENARAI ISTILAH

Radiative transfer	Pemindahan menyinar
partial frequency redistribution	Pengagihan kekerapan separa
Efficient	Cekap
Efficiency	Kecekapan
Family Iterative Method	Famili kaedah lelaran

SENARAI SIMBOL

$+$	Penambahan
$-$	Penolakan
$\times$	Pendaraban
$=$	Sama dengan
$\neq$	Bukan sama dengan
$<$	Kecil daripada
$\leq$	Kecil atau sama dengan
$>$	Besar daripada
$\geq$	Besar atau sama dengan
α	Alpha
β	Beta
∂	Delta
γ	Gamma
ε	Ralat Maksimum
ω	Omega
Σ	Penjumlahan
λ	Lamdha
$\in$	Unsur kepada
h	Saiz subselang
F	Fungsi nilai nyata
PP	Peratus penurunan
$D^{\alpha}u(x)$	Terbitan Caputo pecahan ruang peringkat pertama
$D^{\beta}u(x)$	Terbitan Caputo pecahan ruang peringkat kedua

SENARAI ALGORITMA

SENARAI LAMPIRAN

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Dalam beberapa tahun ini, kajian-kajian yang melibatkan permasalahan nilai sempadan dua titik peringkat pecahan menunjukkan peningkatan bilangan kajian yang mendadak menerusi penggunaan kaedah berangka (Kou dan Zhang, 2007) yang mana peningkatan tersebut telah menyelesaikan pelbagai masalah model matematik dalam bidang sains, kejuruteraan dan ekonomi (Sontakke & Shaikh, 2015).

Impak daripada peningkatan tersebut, kajian terhadap masalah nilai sempadan dua titik peringkat pecahan semakin berkembang. Berdasarkan sorotan kajian sebelum ini, tidak banyak kajian yang dilakukan terhadap masalah nilai sempadan dua titik peringkat pecahan. Walau bagaimanapun, beberapa penyelidik telah melakukan kajian mengenai permasalahan nilai sempadan dua titik peringkat pecahan iaitu Fix dan Roof (2004), Zhang (2009) dan Stynes dan Gracia (2015). Tambahan pula, kajian terperinci telah dilakukan oleh Sunarto *et al.,* (2013, 2014, 2015a, 2015b) yang mempertimbangkan masalah nilai sempadan dengan membabitkan persamaan terbitan separa parabolik dan kemudiannya ia digunakan untuk mendapatkan persamaan penghampiran. Seterusnya sistem persamaan linear dapat dibentuk dan diselesaikan dengan menggunakan famili kaedah lelaran bagi mendapatkan penyelesaian hampiran (Youssef, 2012).

Justeru itu, kajian ini akan mengembangkan kajian yang telah dilakukan oleh Sunarto *et al.,* (2015b) kepada masalah nilai sempadan dua titik peringkat pecahan pada persamaan terbitan biasa peringkat pecahan seperti berikut (Alkan *et al.*, 2016):

$$d(x)D^{\beta}u(x) + a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in [\eta, \gamma] \qquad (1.1)$$

di mana fungsi $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ $d(x)$, dan $f(x)$ adalah fungsi yang diketahui. Persamaan (1.1) juga merupakan persamaan terbitan biasa peringkat pecahan. Untuk menyelesaikan persamaan ini, skema pengoperasi beza depan dan skema pengoperasi terbitan Caputo perlu dipertimbangkan semasa proses mendapatkan persamaan penghampiran Caputo seterusnya membentuk satu sistem persaman linear yang sepadan.

Daripada sistem linear yang dibentuk, terdapat dua pendekatan kaedah penyelesaian yang boleh dipertimbangkan iaitu famili kaedah terus (Conte dan de Boor, 1980) dan famili kaedah lelaran (Young, 1971). Namun berdasarkan ciri-ciri matriks yang dibentuk menunjukkan kaedah lelaran adalah yang sesuai digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kajian ini. Hal ini kerana ciri-ciri matriks yang dibentuk daripada persamaan linear sistem mempunyai saiz yang berskala besar dan bersifat jarang yang mana tidak sesuai menggunakan kaedah terus.

Justeru itu, kajian ini memberi tumpuan kepada famili kaedah lelaran titik pengenduran berlebihan berturut-turut (SOR) dan famili kaedah lelaran blok iaitu kumpulan tak-tersirat pengenduran berlebihan berturut-turut (EGSOR).

1.2 Kepelbagaian Persamaan Terbitan Biasa

Dalam kajian ini, permasalahan persamaan terbitan biasa peringkat pecahan dipertimbangkan untuk mendapatkan persamaan penghampiran beza terhingga Caputo dalam menyelesaikan masalah nilai sempadan dua titik peringkat pecahan-tunggal bagi permasalahan pertama dan pecahan-ganda dua bagi permasalahan kedua. Namun terlebih dahulu persamaan terbitan biasa dibincangkan dengan lebih lanjut dalam bahagian ini sebelum perbincangan dilanjutkan kepada persamaan terbitan biasa peringkat pecahan yang akan dikupas dengan lebih lanjut dalam Bab 3.

Persamaan terbitan biasa memainkan peranan yang amat penting dan digunakan dalam pelbagai bidang matematik seperti matematik gunaan, matematik tulen, matematik fizik dan matematik kejuruteraan (Chicone, 2006). Salain itu, persamaan terbitan biasa tidak seperti persamaan aljabar yang lain di mana bentuk persamaannnya adalah melibatkan fungsi dan bukan hanya nombor dan mewakili kuantiti secara berterusan untuk mengubah kadar perubahan dalam kajian.

Pada asasnya, persamaan terbitan biasa merupakan satu persamaan yang mengandungi satu atau lebih syarat yang melibatkan satu pembolehubah u yang bergantung dengan pembolehubah tak bersandar, x seperti $\frac{du}{dx} = 2x$.

Setiap persamaan terbitan biasa boleh diklasifikasikan berdasarkan ciri-ciri dan fungsi masing-masing. Antaranya ialah persamaaan terbitan biasa peringkat linear ataupun tak linear. Maka pelbagai kaedah berangka yang boleh dipertimbangkan untuk mendiskretkan persamaan terbitan seperti kaedah beza terhingga (KBT) (Suchde dan Kuhnert, 2019), kaedah isipadu terhingga (Feng *et al.,* 2015), kaedah unsur terhingga (Jin *et al.,* 2016) dan kaedah pendiskretan kubik B-splin (Suardi *et al.,* 2017). Walau bagaimanapun, kajian ini hanya menghadkan perbincangan kepada kaedah beza terhingga bersama dengan skema pengoperasi Caputo dalam proses pendiskretan.

Selanjutnya, persamaan terbitan biasa peringkat integer merupakan persamaan yang mempunyai satu pembolehubah nyata tak bersandar x dan pembolehubah bersandar u dengan menghasilkan terbitan tersebut $u', u'', \ldots, u^{(n)}$ di mana semua terbitan adalah terhadap x dan n adalah sebarang integer positif. Oleh itu, persamaan terbitan biasa linear dan tertib $ke-n$ dinyatakan seperti berikut (Stretter, 1973):

$$F\left(x, u, u', u'', \ldots,\ u^{(n)}\right) = 0 \tag{1.2}$$

dengan F mewakili fungsi nilai nyata dari pembolehubah-pembolehubah $n+2$ iaitu $x, u, u', u'', \ldots,\ u^{(n-1)}$ yang memberi makna ia akan melibatkan terbitan satu atau lebih pembolehubah bersandar terhadap satu pembolehubah tak bersandar dalam persamaan terbitan biasa peringkat integer. Daripada persamaan (1.2), persamaan terbitan biasa peringkat $ke-n$ juga dapat dituliskan semula:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

dengan f adalah fungsi yang diketahui. Selain daripada persamaan terbitan biasa dapat dinyatakan dalam peringkat tertinggi, persamaan terbitan biasa juga terbahagi kepada dua kategori iaitu persamaan terbitan linear dan tak linear.

Berdasarkan persamaan (1.3), persamaan terbitan linear bagi peringkat $ke-n$ dapat dinyatakan seperi berikut:

$$a_0(x)u^n + a_1(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)u = r(x) \tag{1.4}$$

dengan fungsi terhadap pembolehubah x yang disebut sebagai pekali persamaan iaitu $a_j(x), 0 \leq j \leq n$ dengan anggapan apa jua bentuk selang $a_0(x) \neq 0$ pada persamaan adalah ditentukan.

Manakala persamaan tak linear pula, fungsi tak linear daripada pembolehubah bersandar atau terbitannya seperti $\sin y$ ataupun e^y tidak boleh hadir di dalam persamaan seperti (Zill dan Cullen, 2005):

Jadual 1.1: Persamaan tak linear

Contoh	Persamaan Tak linear	Peringkat
1	$(1-u)\dfrac{du}{dx}+2u=e^x$	Pertama
2	$\dfrac{d^2u}{dx^2}+\sin(u)=0$	Kedua
3	$\dfrac{d^4u}{dx^4}+u^2=0$	Keempat

di mana Contoh 1 dikategorikan sebagai persamaan terbitan biasa tak linear apabila pekali yang bergantung kepada $\frac{du}{dx}$ iaitu $(1-u)$ yang muncul dalam persamaan. Sama seperti Contoh 2 turut dikategori tak linear kerana kehadiran sebutan $\sin(u)$ dalam persamaan dan Contoh 3 dikategorikan tak linear kerana kuasa yang bukan satu dan u^2 wujud dalam persamaan.

Selain itu, persamaan terbitan biasa juga dapat ditentukan sama ada persamaan yang homogen ataupun tak homogen. Sekiranya $r(x)=0$ pada persamaan (1.4), maka dianggap sebagai persamaan homogen dan persamaan tersebut tak homogen jika $r(x)\neq 0$ (Zill dan Cullen, 2005).

Dapat diperlihatkan Jadual 1.1, persamaan terbitan biasa memiliki pelbagai peringkat. Menurut Rashidina dan Jalilian (2009), persamaan terbitan biasa bagi peringkat pertama dan kedua masing-masing dapat ditulis dalam persamaan seperti berikut:

$$a_1(x)\frac{du}{dx}+a_0(x)u=g_0(x) \tag{1.5}$$

$$a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}+a_1(x)\frac{du}{dx}+a_0(x)u=g_1(x) \tag{1.6}$$

dengan persamaan (1.5) mewakili peringkat pertama dan persamaan (1.6) peringkat kedua.

Dapat diperhatikan bahawa kedua-dua persamaan terbitan ini adalah peringkat integer. Selain itu, wujud ciri-ciri untuk mengenalpasti persamaan terbitan biasa iaitu pembolehubah bersandar u dan semua terbitan $x, u, u', u'', \dots,\ u^{(n)}$ adalah berdarjah satu. Sebaliknya pekali persamaan $a_0,\ a_1,\ a_2, \dots, a_n$ bergantung kepada pembolehubah tak bersandar x.

Perlu ditegaskan bahawa kajian ini hanya memberi tumpun kepada perbincangan untuk mengembangkan persamaan terbitan terbitan biasa peringkat