MENYELESAIKAN PERSAMAAN POISSON SATU MATRA DENGAN MENGGUNAKAN KAEDAH ISIPADU TERHINGGA MELALUI KAEDAH MIN ARITMETIK

WONG CHIN CHAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN EKONOMI
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

2005

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

31 Mac 2005

WONG CHIN CHAN
HS2002-3851

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**

   (DR. JUMAT BIN SULAIMAN)

2. **PEMERIKSA 1**

   (CIK DARMESAH GABDA)

3. **PEMERIKSA 2**

   (CIK KHADIZAH GHAZALI)

4. **DEKAN**

   (PROF. MADYA DR. AMRAN AHMED)

PUMS 99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: MENYELESAIKAN PERSAMAAN POISSON. SATU MATRA DENGAN MENGGUNAKAN KAEDAH ISIPADU TERHINGGA MELALUI KAEDAH MUN ARITMETIK

Ijazah: SARJANA MUDA MATEMATIK DENGAN EKONOMI

SESI PENGAJIAN: 2002 / 2003

Saya WONG CHIN CHAN

(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPS/Sarjana/Doktor Falsafah)* ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. **Sila tandakan (/)

[/]	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)
[ ]	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
[✓]	TIDAK TERHAD	

Disahkan oleh

(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: 1, Jalan Taping, 91600 Sandakan.

Dr. Jumat bin Sulaiman

Nama Penyelia

Tarikh: 22 / 03 / 2005

Tarikh:

CATATAN: * Potong yang tidak berkenaan.

** Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa/organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.

@ Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan, atau disertasi bagi pengajian secara kerja kursus dan penyelidikan, atau Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGHARGAAN

Ucapan ribuan terima kasih kepada penyelia saya iaitu Dr. Jumat bin Sulaiman yang telah banyak memberi tunjuk ajar serta bimbingan dalam proses menghasilkan penulisan ini. Saya amat menghargai jasa baik beliau dalam meyelesaikan masalah, membantu dan memberi banyak idea dalam penyediaan penulisan ini. Selain itu, beliau juga sudi meluaskan masa untuk berjumpa dengan saya dan banyak membantu saya dalam menyiapkan pengaturcaraan.

Selain itu, saya juga ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada pensyarah-pensyarah lain yang turut memberi komen sewajarnya. Saya juga ingin mengucapkan terima kasih kepada rakan-rakan yang telah banyak memberikan galakan yang berguna.

Akhir sekali, saya juga ingin memohon maaf atas apa jua kesilapan yang telah berlaku semasa dalam proses menyiapkan penulisan ini. Sekian, terima kasih.

ABSTRAK

Kajian ini adalah mengkaji tentang perumusan penghampiran isipadu terhingga. Dalam kajian ini, skema beza pusatan digunakan dalam perumusan penghampiran isipadu terhingga untuk menyelesaikan persamaan Poisson dalam satu matra. Justeru itu, persamaan penghampiran isipadu yang diperolehi akan menjanakan sistem persamaan linear dan diselesaikan dengan kaedah lelaran. Dalam disertasi ini, kaedah lelaran Gauss-Seidel (GS) dan Min Aritmetik (MA) digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Pembinaan satu algoritma GS dan MA juga diperihalkan. Dalam pemerhatian ujikaji, kaedah lelaran lelaran GS dan MA, terdapat tiga parameter digunakan untuk membezakan keefisienan pengiraan bagi kedua-dua kaedah. Didapati bahawa kaedah MA adalah lebih sesuai digunakan dalam kajian ini berbanding dengan kaedah lelaran GS.

NUMERICAL METHODS TO SOLVE ONE DIMENSION POISSON EQUATIONS USING FINITE VOLUME APPROXIMATION METHOD VIA ARITHMETIC MEAN METHOD

ABSTRACT

This research is about formulation approximation of finite volume equation. On this research, central differencing scheme is used to solve one-dimensional Poisson equations. By using the formulation approximation of finite volume equation will generate a system of linear equation, and then the system can be solved by iterative methods. Numerical methods used by this research are Gauss-Seidel (GS) and Arithmetic Mean (AM) iterative method to solve the system of linear equations. Development of GS and AM algorithms are also described. In the observation of experiment on GS and AM iterative methods, there are three parameters used to differentials the efficiency of calculation for both methods. This can be concluded that AM iterative method is more suitable than GS iterative method for this research.

SENARAI KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

Γ	Pekali resapan
Γ_e	Pekali resapan di arah e
Γ_w	Pekali resapan di arah w
Γ_E	Pekali resapan di arah E
Γ_W	Pekali resapan di arah W
a_W	Pekali bagi ϕ_W
a_E	Pekali bagi ϕ_E
a_P	Pekali bagi ϕ_P
ϕ	Nilai sempadan
ϕ_W	Nilai sempadan di arah W
ϕ_E	Nilai sempadan di arah E
ϕ_P	Nilai sempadan di arah P
δx_{WP}	Jarak diantara titik W dengan P
δx_{PE}	Jarak diantara titik P dengan E
δx_{wP}	Jarak diantara titik w dengan P
δx_{Pe}	Jarak diantara titik P dengan e
δx_{we}	Jarak diantara titik w dengan e
S	Punca
$\overline{S}$	Purata punca S melalui isipadu terkawal
S_p	Nilai S yang berada di tengah-tengah isipadu kawalan
S_u	Nilai awal bagi S dalam isipadu kawalan
Δx	Lebar isipadu terkawal

A	Permukaan isipadu terkawal
A_w	Permukaan isipadu terkawal di arah w
A_e	Permukaan isipadu terkawal di arah e
ΔV	Isipadu
Pe	Nombor Peclet
ρ	Kepadatan
m	Meter
W	Watt
K	Kelvin
GS	Gauss-Seidel
MA	Min Aritmetik
%	Peratus
^{o}C	Darjah Celsius

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Dalam kajian kaedah berangka, persamaan pembezaan dan pengamiran adalah memainkan peranan yang penting. Terutamanya persamaan pembezaan separa. Dalam kajian ini, pengamiran telah memainkan peranan penting dalam kaedah isipadu terhingga.

1.1.1 Persamaan Pembezaan

Persamaan pembezaan adalah suatu persamaan yang sering digunakan dalam bidang kejuruteraan, penggunaan simulasi komputer dan penggunaan dalam fizik. Suatu persamaan yang mengkaitkan suatu fungsi yang tidak diketahui serta terbitan fungsi

berkenaan dikenali sebagai persamaan pembezaan. Fungsi tersebut bergantung terhadap satu atau lebih pemboleh ubah. Umumnya pemboleh-pemboleh ubah tersebut ditafsirkan sebagai masa. Fungsi yang memenuhi persamaan pembezaan berkenaan ditafsirkan sebagai kuantiti fizikal yang berubah terhadap masa. Contohnya, $y = f(t)$. Pemboleh ubah y dikenali sebagai pemboleh ubah tak merdeka kerana pemboleh ubah y bergantung kepada t dan t merupakan pemboleh ubah merdeka.

1.1.2 Persamaan Pembezaan Separa

Persamaan pembezaan separa sering dijanakan dalam penggunaan simulasi komputer, seperti simulasi fenomena semulajadi dan animasi. Persamaan pembezaan separa ialah persamaan yang membabitkan fungsi u untuk beberapa pemboleh ubah dan kalkulus pembezaan separa. Contohnya, dengan menulis simbol di sebelah kanan bawah untuk suatu fungsi untuk menghasilkan kalkulus pembezaan separa (Mcowen, 2003).

$$u_t = ku_{xx} \tag{1.1}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1.2}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.3}$$

Persamaan (1.1) merupakan persamaan pemanasan satu dimensi dengan u mewakili pengaliran suhu dalam rod batang dan k merupakan pekali pengaliran suhu. Persamaan (1.2) merupakan persamaan gelombang satu dimensi dengan u mewakili pemindahan untuk getaran tali dari tempat keseimbangan, c mewakili kelajuan untuk penyebaran gelombang. Persamaan (1.3) ialah persamaan Laplace dua dimensi digunakan untuk analisis keadaan kestabilan dalam masalah pengaliran suhu dan terdapat banyak masalah yang lain pada matematik dengan fizik (Mcowen, 2003).

Persamaan pembezaan separa mempunyai tiga jenis persamaan, iaitu persamaan parabolik, eliptik dan hiperbolik. Persamaan pembezaan separa jenis parabola muncul dalam masalah saintifik dan kejuruteraan, disimbolkan seperti berikut:

$$u_t = L(u) \tag{1.4}$$

dengan $L(u)$ merupakan penentu pembezaan separa eliptik tertib kedua tersebut merupakan persamaan linear atau tidak linear (Ames, 1992).

Persamaan pembezaan separa jenis eliptik muncul sebagai masalah keseimbangan dalam dua dimensi dan ke atas. Persamaan terkenal yang umum bagi Laplace ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{1.5}$$

Bagi persamaan eliptik dua dimensi keunikannya ialah kompleks. Contohnya,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.6}$$

dengan $x + iy = \alpha$ dan $x + iy = \beta$ adalah pemalar yang α dan β adalah kompleks. Persamaan (1.6) boleh berubah menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0 \tag{1.7}$$

Menggunakan pengamiran penyelesaian yang umum

$$u = f(\alpha) + g(\beta) = f(x + iy) + g(x + iy) \tag{1.8}$$

diperolehi dengan f dan g adalah fungsi pengantaraan (Ames, 1992).

Menurut Ames (1992) persamaan pembezaan separa jenis hiperbolik muncul dalam pemindahan (peresapan neutron dan pemindahan radiasi), mekanik gelombang, dinamik gas, getaran dan bidang yang lain. Persamaan gelombang yang ringkas ditunjukkan dalam bentuk umum ialah:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1.9}$$

dengan penyelesiaan umum boleh diperolehi dan dicarikan oleh D'Alembert. Jika u_{tt} dan u_{xx} adalah selanjar, ia akan menukarkan kepada pemboleh ubah

$$\theta = x + t, \qquad \psi = x - t, \qquad u(x,t) = v(\theta,\psi)$$

Menukarkan persamaan (1.9) kepada $v_{\theta\psi} = 0$, keseluruhan penyelesaiannya ialah

$$v = f(\theta) + g(\psi) \tag{1.10}$$

dengan f dan g adalah menjadi pengantaraan fungsi yang boleh beza. Dengan andaian $v_{\theta\psi} = v_{\psi\theta}$, maka penyelesaian

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \tag{1.11}$$

diperolehi.

1.1.3 Pengamiran

Terdapat ramai ahli matematik memberikan definisi tentang pengamiran. Antaranya, George (1996) menyatakan pengamiran sebagai songsangan kepada pembezaan. Fungsi *F(x)* adalah antiterbitan bagi fungsi *f(x)* jika

$$F'(x) = f(x) \tag{1.12}$$

untuk semua x dalam domain bagi f. Set bagi semua antiterbitan untuk f ialah pengamiran tak tentu bagi f dengan mempertimbangkan x, ditunjukkan sebagai $\int f(x)dx$. Simbol $\int$ adalah tanda pengamiran dan fungsi f adalah fungsi yang telah dikamirkan daripada pengamiran dan x ialah pemboleh ubah bagi pengamiran tersebut.

Merujuk kepada korolari teorem nilai min yang menyatakan bahawa fungsi yang berlainan dilakukan dengan pembezaan yang sama dibezakan dengan pemalar. Jika

$f'(x) = g'(x)$ di setiap pada selang, maka wujud satu pemalar C supaya $f(x) = g(x) + C$ bagi semua x dalam selang. Mengikut teorem tersebut, setelah diperolehi satu antiterbitan F daripada fungsi f, satu lagi antiterbitan bagi f berbeza dari F dengan pemalar diperolehi. Maka pengamiran ditakrifkan seperti berikut:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.13}$$

1.1.4 Persamaan Poisson

Persamaan Poisson ialah suatu pembezaan terdiri daripada persamaan Laplace yang tidak homogen. Persamaan Poisson banyak digunakan dalam masalah penyebaran jisim, penyebaran haba, ketidakmampatan aliran bendalir dengan ciri tidak kehomongenan wujud. Dalam kajian ini, persamaan Poisson satu matra akan diguna iaitu hanya satu pemboleh ubah tak merdeka sahaja terdapat dalam persamaan berkenaan. Bentuk umum persamaan Poisson satu matra seperti berikut:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \tag{1.14}$$

Antara contoh-contoh persamaan Poisson satu matra adalah seperti berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 = 0 \tag{1.15}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x + 12 \tag{1.16}$$

1.2 Kaedah Berangka

Menurut Ames (1992), pada masa kini kaedah berangka kebiasaannya digunakan dalam pelbagai bidang, manakala ia belum dikenali sebelum 1950. Komputer yang lebih cepat adalah diperlukan untuk menyelesaikan masalah yang lebih rumit kerana masa pengiraan suatu masalah bagi komputer adalah bergantung kepada kelajuan komputer itu.

Terdapat beberapa kaedah berangka yang biasa digunakan, iaitu kaedah unsur terhingga, kaedah beza terhingga kaedah unsur sempadan dan kaedah isipadu terhingga. Kajian ini, hanya kaedah isipadu terhingga digunakan.

1.3 Objektif Kajian

Dalam kajian ini, terdapat tiga objektif utama, iaitu:

i. Merumuskan persamaan penghampiran isipadu terhingga menggunakan skema beza pusatan ke atas persamaan Poisson dalam satu matra. Objektif ini akan merumuskan satu persamaan penghampiran isipadu terhingga dengan

menggunakan skema beza pusatan iaitu salah satu skema yang terdapat dalam kaedah isipadu terhingga untuk menyelesaikan masalah persamaan Poisson dalam satu matra. Penulis menggunakan skema beza pusatan disebabkan skema ini lebih mudah difahami.

ii. Membina algoritma MA ke atas sistem persamaan linear yang dijanakan oleh persamaan penghampiran isipadu terhingga.

iii. Menunjukkan penyelesaian berangka menggunakan MA adalah lebih cepat berbanding dengan kaedah lelaran GS.

1.4 Skop Kajian

Kajian ini hanya menumpukan dalam menyelesaikan persamaan Poisson satu-matra dengan menggunakan skema beza pusatan untuk mendapatkan persamaan algebra. Terdapat beberapa persamaan boleh dipertimbangkan iaitu persamaan parabolik, eliptik dan hiperbolik. Kajian ini hanya akan menumpu pada persamaan eliptik sahaja.

Selepas mendapatkan persamaan algebra, persamaan algebra diselesaikan dengan menggunakan kaedah lelaran berangka, iaitu kaedah lelaran GS dan MA sahaja. MATHCAD 2001i (Fausett, 2002) digunakan sebagai alat untuk memudahkan menyelesaikan masalah kaedah berangka. Selain itu ia juga dapat mencepatkan proses pengiraan berbanding dengan cara manual.

BAB 2

ULASAN LITERATUR

2.1 Teknik isipadu terhingga

Dalam kajian tentang kaedah berangka, terdapat beberapa teknik untuk menyelesaikan persamaan pembezaan separa. Philip (2003) menyatakan bahawa teknik isipadu terhingga untuk menyelesaikan persamaan pembezaan separa telah digunakan dalam ulasan sekurang-kurangnya sejak 1953 oleh R. H. MacNeal dimana kaedah yang digunakan untuk mendiskretkan persamaan eliptik

$$-div(k[(t,x)]\nabla u) - f[(u,t,x)] = 0. \tag{2.1}$$

dengan f bergantung secara linear terhadap u. Skema isipadu terhingga untuk masalah eliptik linear yang lebih umum termasuk keputusan penumpuan dalam skema telah dikaji oleh Henrich (1987, 1988). Pendiskretan isipadu terhingga untuk masalah-masalah eliptik yang linear juga boleh diperolehi daripada Bey (1998) yang menumpu dalam aspek memperbaiki grid penyesuaian dan kaedah multi-grid.

RUJUKAN

Abdul Rahman Abdullah, 1990. P*engiraan Berangka.* Percetakan Dewan Bahasa dan Pustaka, Selangor.

Ames, W.F., 1992. *Numerical Methods for Partial Equations.* Ed.ke-3. Academic Press, U.S.A.

Boyce, W.E., Diprima, R.C., 1997. *Persamaan Pembezaan Permulaan dan Masalah Nilai Sempadan.* Ed. ke-4. Penerbit Universiti Sains Malaysia, Pulau Pinang.

Chapra, S.C. dan Canale, R.P., 2002. *Numerical Methods for Engineers With Software and Programming Application.* Ed.ke-4. McGraw-Hill Higher Education, New York.

Fausett, L., 2002. *Numerical Methods Using MathCad.* Prientice-Hall, U.S.A.

Finney, R.L. dan Thomas, G.B., 1996. *Calculus*. Ed. ke- 9. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A..

Galligani E. dan Ruggiera V., 1997. The two – stage arithmetic mean method. *Journal of Applied Mathematics and Computation* **85**, 245 – 264.

Iwatsu, E.R., 2001. C*omputational Fluid Dynamics.* Universiti Cottbus, Jerman. http://www.fml.m.dendai.ac.jp/iwatsu/profiwasu/computational%20Fluid%20Dynamics.pdf.

Sulaiman, J., Hasan, M.K. dan Othman, M., 2004. *A fourth-order compact finite difference solver for one – dimensional Poisson's equations via the Arithmetic Mean method.* Universiti Malaysia Sabah (belum terbit).

Leveque, J.R., 2002. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University, United Kingdom.

Keller, H. dan Crandall, J.G.., 1998. *Mastering Matchad Version 7.* McGraw-Hill Companies, U.S.A.

Mcowen, R.C.,2003. *Partial Differential Equations: Methods and Applications.* Ed.ke-2. Pearson Education, U.S.A.

Philip, P., 2003. *Thesis Transient Numerical Simulation of Sublimation Growth of Sic Bulk Single Crystals: Modeling, Finite Volume Method, Results.* Weierstrass Institute, Jerman.

Stynes. M., 1994. Finite volume methods for convection-diffusion problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **63**, 83 – 90.

Versteeg, H.K. dan Malalasekera, W., 1995. A*n Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method.* Longman Scientific & Technical, England.