PENYELESAIAN PERSAMAAN KAMIRAN VOLTERRA DAN FREDHOLM JENIS DUA DENGAN KAEDAH PENGURAIAN ADOMIAN

SOO YAN JIU

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH
SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2007

PUMS 99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: PENYELESAIAN ~~BER~~ PERSAMAAN KAMIRAN VOLTERRA DAN FREDHOLM JENIS DUA DENGAN KAEDAH PENGURAIAN ADOMIAN

Ijazah: SARJANA MUDA SAINS

SESI PENGAJIAN: 2004 - 2007

Saya SOO YAN JIU

(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (~~LPS~~/Sarjana/~~Doktor Falsafah~~)* ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. **Sila tandakan (/)

[ ]	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)
[ ]	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
[/]	TIDAK TERHAD	

Disahkan oleh

(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: 276, JALAN 6, DESA PANDAN ULU, 52100 KUALA LUMPUR

Nama Penyelia

Tarikh: 19/4/2007

Tarikh:

CATATAN: * Potong yang tidak berkenaan.

** Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa/organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.

@ Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan, atau disertasi bagi pengajian secara kerja kursus dan penyelidikan, atau Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

27 April 2006

SOO YAN JIU
HS2004-4698

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**
   (CIK SUZELAWATI ZENIAN)

2. **PEMERIKSA**
   (PROF. MADYA DR. JUMAT SULAIMAN)

4. **DEKAN**
   (SUPT/KS. PROF. MADYA DR. SHARIFF A. K OMANG)

PENGHARGAAN

Ribuan terima kasih diucapkan kepada Cik Suzelawati Zenian, penyelia projek ini. Beliau telah banyak membantu untuk menjayakan projek ini. Pada awal kajian, beliau memberi cadangan dan bantuan dalam mendapatkan sumber maklumat seperti jurnal dan buku yang digunakan untuk rujukan. Selain itu, beliau juga membantu untuk memahami sumber maklumat yang diperolehi.

Semasa menghadapi masalah untuk mendapatkan keputusan, Cik Suzelawati telah memberi nasihat untuk membantu mendapatkan keputusan. Beliau juga memberi cadangan untuk menganalisiskan keputusan yang diperolehi. Cik Suzelawati selalu memberi penjelasan untuk sesuatu masalah melalui pertanyaan soalan, ini sangat membantu untuk mencapai pemahaman yang jelas daripada terus memberi jawapan.

Bantuan yang diberi oleh Cik Suzelawati amat dihargai, ribuan terima kasih diucapkan sekali lagi terhadap beliau.

ABSTRAK

Kaedah penguraian Adomian (PA) merupakan kaedah yang memberi penyelesaian dalam bentuk siri tak terhingga yang menumpu kepada penyelesaian tepat. Penyelesaian kaedah PA bebas daripada ralat pembundaran kerana tidak melibatkan proses pelinearan, teori usikan ataupun sebarang andaian yang akan mengubah bentuk masalah. Kajian ini bertujuan memperkenalkan tiga jenis kaedah PA yang berlainan iaitu kaedah PA piawai (PAP), kaedah PA terubahsuai (PAT) dan kaedah PA dua langkah (PADL) serta mendapatkan kaedah PA yang dapat memperolehi penyelesaian dengan lebih cepat dan mudah. Tiga kaedah PA tersebut diaplikasikan terhadap empat persamaan pengamiran iaitu persamaan pengamiran Volterra linear, persamaan pengamiran Fredholm linear, persamaan pengamiran Volterra tak linear dan persamaan pengamiran Fredholm tak linear. Langkah penyelesaian tiga jenis kaedah PA dibandingkan. Untuk kes linear, Volterra dan Fredholm, kaedah PADL dan PAT hanya memerlukan satu lelaran untuk mendapatkan penyelesaian tepat, manakala kaedah PAP memerlukan lebih daripada satu lelaran. Untuk kes tak linear, Volterra dan Fredholm, kaedah PADL terus memperolehi penyelesaian tepat dengan sekali kerja penggantian sahaja. Tetapi, kaedah PAP dan PAT melibatkan kerja pengiraan yang lebih panjang, terutamanya kaedah PAP. Jadi, kaedah PADL merupakan kaedah PA yang dapat memperolehi penyelesaian dengan lebih cepat dan mudah.

ABSTRACT

SOLVING VOLTERRA AND FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND BY ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Adomian decomposition method (ADM) is a method that finds the solution as an infinite series which converge to exact solution. Solutions found by ADM are free of round off errors because no linearization, perturbation or any assumptions that may change the problem involved. The purpose of this project is to introduce three types ADM that is standard ADM, modified ADM and two-step ADM. Besides, this project proposed to get the ADM that will find the solution faster and easier. The three types ADM were applied to four integral equations that are linear Voletrra integral equation, linear Fredholm integral equation, nonlinear Volterra integral equation and nonlinear Fredholm integral equation. Comparison of step of calculation for the three types ADM was done. For linear case, Volterra and Fredholm, the two-step ADM and modified ADM find the exact solution with one iteration; meanwhile, the standard ADM need more than one iteration. For nonlinear case, Volterra and Fredholm, two-step ADM only need a simple assign work to find the exact solution. But, the standard ADM and modified ADM need a lot of calculation step, especially the standard ADM. Thus, the two-step ADM is the ADM that will find the solution faster and easier.

KANDUNGAN

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Persamaan pengamiran boleh dikatakan sebagai songsangan kepada persamaan pembezaan. Persamaan pengamiran merupakan salah satu topik yang terkandung dalam mata pelajaran matematik yang harus dikuasai oleh para pelajar sains, sama ada peringkat sekolah menengah atau peringkat pengajian tinggi. Ini disebabkan persamaan pengamiran sangat berguna bukan sahaja dalam bidang matematik tetapi juga dalam bidang lain seperti kejuruteraan, kimia, fizik dan sebagainya.

Sejak dahulu lagi, penyelesaian persamaan pengamiran boleh diperolehi dengan pelbagai kaedah berangka seperti kaedah perhitungan terus, kaedah penyelesaian siri, kaedah penghampiran berturutan, kaedah penggantian berturutan dan sebagainya. Kaedah yang tersebut digolongkan sebagai kaedah tradisional. Kaedah tradisional tidak mudah untuk diaplikasikan serta melibatkan langkah kerja yang rumit dan membosankan. Oleh itu, beberapa kaedah moden diperkenalkan. Contohnya kaedah siri Taylor, kaedah penguraian Adomian, kaedah usikan homotopi (Abbasbandy, 2006) dan sebagainya. Berbanding dengan kaedah tradisional, kaedah moden mampu menyelesaikan masalah dengan langkah kerja yang lebih mudah dan ringkas. Dalam kajian ini, kaedah penguraian Adomian (PA) dari kategori kaedah moden akan dibincangkan.

Sama seperti kaedah lain yang terkenal, kaedah PA telah dikaji dan diubahsuai demi meringkaskan dan memudahkan lagi langkah penyelesaian yang diperlukan. Dalam kajian ini, kaedah PA yang akan dibincangkan ialah kaedah PA asal yang dikenali sebagai kaedah PA piawai (PAP), kaedah PA terubahsuai (PAT) dan kaedah PA dua langkah (PADL). Perbandingan langkah penyelesaian antara tiga jenis kaedah PA tersebut akan ditunjukkan dengan beberapa contoh persamaan pengamiran.

1.2 Teori Pengamiran

Nama persamaan pengamiran diperkenalkan oleh Du Bois-Reymond pada tahun 1888 (Brunner, 2004) tetapi beliau bukan orang yang memperkenalkan teori pengamiran. Sejarah tentang teori pengamiran adalah panjang dan menarik. Tetapi oleh sebab fokus kajian ini adalah berkenaan kaedah penguraian Adomian, maka perkembangan teori pengamiran hanya akan dibincangkan secara ringkas.

Secara am, definisi pengamiran diketahui berasal daripada seorang Yunani pada zaman dulu, Archimedes, padahal cerita sebenar merupakan Newton dan Leibniz yang memulakan definisi pengamiran. Walau bagaimanapun, pada zaman Newton, konsep untuk had dan terbitan masih kurang jelas. Oleh itu, definisi dan teori pengamiran kurang berkembang pada zaman tersebut. Tetapi dengan menurut kepada definisi Newton, ramai pakar kalkulus seperti adik-beradik Bernoulli dan Euler mampu menjumpai penemuan yang menakjubkan untuk definisi dan teori pengamiran.

Antara pelbagai definisi yang dikemukakan, definisi yang diberikan oleh Cauchy pada awal era moden yang mana kemudiannya dilengkapkan oleh Riemann adalah lebih mudah untuk difahami.

Definisi pengamiran yang dilengkapkan oleh Riemann merupakan definisi asli pertama yang lebih teliti. Teori Riemann digunakan dengan meluas di peringkat pengajian tinggi sebagai kursus pengenalan untuk pengamiran kerana teori tersebut mempunyai tarikan intuisi dan teorem yang mudah dibuktikan. Walau bagaimanapun, teori Riemann kurang efisien untuk aplikasi lain. Oleh yang demikian, teori tersebut biasanya digunakan untuk pembelajaran peringkat pengajian tinggi sahaja tetapi kurang digemari oleh ahli matematik.

Definisi pengamiran yang diperkenalkan pleh Henri Lebesgue pada awal abad kedua puluh merupakan definisi yang amat digemari oleh komuniti matematik (Lee & Vyborny, 2000). Ini disebabkan teori Lebesgue begitu memuaskan sehingga tidak dapat disangkal lagi. Walau bagaimanapun, teori tersebut kurang sempurna kerana tidak meliputi kamiran penumpuan tak mutlak dan kamiran tak wajar. Pada tahun 1914, Perron memperkenalkan satu definisi baru yang mengatasi teori Lebesgue yang meliputi kamiran Newton dan kamiran tak wajar. Walau bagaimanapun, teori Lebesgue dan teori Perron tidak terkenal bagi sesiapa yang bukan ahli matematik kerana peringkat pengetahuan matematik yang canggih diperlukan untuk memahami teori tersebut.

Pada tahun 1957, Jaroslav Kurzweil memberikan satu definisi asas untuk pengamiran yang mana setara dengan teori Perron dan definisi tersebut dikembangkan oleh Ralph Henstock. Teori Kurzweil-Henstock telah menggabungkan kelebihan teori Riemann dan teori Lebesgue. Dengan itu, teori Kurzweil-Henstock sesuai digunakan sebagai kursus pengenalan di peringkat pengajian yang berlainan kerana teori tersebut tidak begitu rumit berbanding teori Riemann (Lee & Vyborny, 2000).

1.3 Kaedah Penguraian Adomian

Kaedah penguraian Adomian (PA) merupakan kaedah yang sesuai digunakan untuk menyelesaikan pelbagai jenis masalah, khususnya persamaan pembezaan dan pengamiran. Kaedah PA akan memberi penyelesaian dalam bentuk siri tak terhingga yang menumpu kepada penyelesaian tepat yang mana setiap komponen siri penyelesaian dapat ditentukan dengan pengamiran mudah.

Kaedah PA dipelopori oleh George Adomian pada awal tahun 1980. Kaedah tersebut diaplikasikan bukan sahaja dalam bidang matematik tetapi juga bidang lain seperti fizik, biologi, kimia dan sebagainya. Kajian-kajian yang telah dilakukan menunjukkan keputusan kaedah PA adalah bebas daripada ralat pembundaran. Ini disebabkan kaedah PA tidak melibatkan proses pelinearan, teori usikan atau andaian yang mungkin mengubah bentuk model masalah. Berbanding dengan kaedah konvensional, kaedah PA memperolehi penyelesaian efisien yang mempunyai ketepatan tinggi dan memerlukan kerja pengiraan minimum sahaja (Wazwaz, 1999).

Selain itu, kaedah PA dibuktikan dapat diprogramkan dengan mudah yang mana kaedah penyelesaian siri lain gagal untuk berbuat sedemikian (Wazwaz, 1998). Ini membolehkan kaedah PA dapat dituliskan dalam bahasa komputer dengan mudah dan pengiraan dengan komputer mempercepatkan dan memudahkan kerja penghitungan serta menjimatkan masa.

Kaedah PA mempunyai satu faktor utama yang penting iaitu siri polinomial yang dikenali sebagai polinomial Adomian. Polinomial Adomian memainkan peranan penting dalam penyelesaian masalah tak linear dan pembuktian penumpuan siri penyelesaian. Walau bagaimanapun, kerja pengiraan polinomial tersebut tidak mudah. Ini menyebabkan kesukaran kecil dalam kerja pengiraan kaedah PA.

Oleh yang demikian, Wazwaz memperkenalkan kaedah PA terubahsuai (PAT) pada tahun 1999. Kaedah PAT merupakan hasil daripada pengubahsuaian kaedah PA Adomian. Berbanding dengan kaedah PA yang asal iaitu kaedah PA piawai (PAP), kaedah PAT dapat memperolehi penyelesaian dengan langkah pengiraan yang lebih ringkas. Selain itu, kaedah PAT mungkin dapat memperolehi penyelesaian masalah tak linear dalam satu atau dua lelaran sahaja dengan tidak memerlukan polinomial Adomian. Ini memudahkan kerja pengiraan kaedah PAT dan mempercepatkan penumpuan siri penyelesaian kepada penyelesaian tepat (Wazwaz, 1999).

Walau bagaimanapun, keberkesanan kaedah PAT bergantung kepada pemilihan fungsi untuk komponen pertama siri penyelesaian. Dengan itu, sekiranya fungsi yang dipilih kurang sesuai, maka akan menyebabkan kerja pengiraan menjadi lebih susah daripada kaedah PAP dan melambatkan penumpuan siri penyelesaian. Oleh itu, satu lagi jenis kaedah PA yang turut diubahsuai daripada kaedah PAP diperkenalkan oleh Luo (2005). Kaedah PA baru tersebut dikenali sebagai kaedah PA dua langkah (PADL) kerana kerja pengiraan dibahagikan kepada dua bahagian.

Berbanding dengan dua kaedah PA yang sebelum itu, kaedah PADL melibatkan langkah pengiraan yang lagi mudah dan mencapai penumpuan siri penyelesaian dengan lagi cepat. Kaedah PADL mampu memberikan penyelesaian masalah linear dan tak linear dengan satu lelaran sahaja dan tidak memerlukan polinomial Adomian. Selain itu, untuk masalah yang sama, kaedah PADL dapat memperolehi penyelesaian tepat dengan satu lelaran sahaja tetapi dua kaedah PA yang lain mungkin hanya memperolehi penyelesaian penghampiran sahaja dengan lebih daripada satu lelaran (Luo, 2005).

1.4 Objektif Kajian

Secara umumnya, tujuan kajian ini dilakukan adalah untuk memperkenalkan tiga jenis kaedah penguraian Adomian (PA) yang berlainan iaitu kaedah PAP, kaedah PAT dan kaedah PADL serta memperolehi kaedah PA yang dapat memberikan penyelesaian persamaan pengamiran dengan lebih cepat dan mudah. Demi mencapai tujuan tersebut, tiga objektif kajian telah ditetapkan.

Objektif pertama untuk kajian ini adalah memahami kaedah PAP, kaedah PAT dan kaedah PADL. Objektif ini ditetapkan untuk mencapai pemahaman yang cukup dan jelas supaya kerja aplikasi yang selanjutnya ini dapat dijalankan dengan licin.

Objektif kedua kajian ini adalah memahami aplikasi kaedah PAP, kaedah PAT dan kaedah PADL terhadap persamaan pengamiran. Objektif ini ditetapkan supaya pemahaman yang jelas untuk aplikasi kaedah-kaedah PA terhadap persamaan pengamiran dicapaikan. Ini disebabkan persamaan pengamiran digunakan sebagai contoh masalah dalam kajian ini.

Objektif terakhir untuk kajian ini adalah membandingkan langkah penyelesaian antara kaedah PAP, kaedah PAT dan kaedah PADL untuk masalah persamaan pengamiran. Objektif ini ditetapkan supaya kaedah PA, antara kaedah PAP, kaedah PAT dan kaedah PADL, yang memperolehi penyelesaian persamaan pengamiran dengan lebih cepat dan mudah diperolehi.

1.5 Skop Kajian

Skop kajian ini adalah menggunakan tiga jenis kaedah penguraian Adomian (PA) yang berlainan iaitu kaedah PAP, kaedah PAT dan kaedah PADL untuk menyelesaikan persamaan pengamiran Volterra dan Fredholm, dengan kes linear dan tak linear, serta membandingkan langkah penyelesaian tiga jenis kaedah PA tersebut untuk persamaan pengamiran yang disebutkan.

1.6 Hipotesis

Hipotesis untuk kajian ini ialah kaedah PADL merupakan kaedah PA yang memperolehi penyelesaian persamaan pengamiran linear dan tak linear dengan paling cepat dan mudah.

BAB 2

ULASAN LITERATUR

2.1 Pengenalan

Seperti mana yang telah disebut sebelum ini, kaedah penguraian Adomian (PA) dapat menyelesaikan masalah dengan langkah kerja yang lebih ringkas dan memberi penyelesaian menumpu kepada penyelesaian tepat yang bebas daripada ralat pembundaran berbanding dengan kaedah tradisional. Oleh sebab kaedah PA mempunyai banyak kelebihan yang mengatasi kaedah tradisional dalam penyelesaian masalah, banyak kajian telah dilakukan terhadap kaedah PA dengan tujuan memperbaiki atau mengkaji penggunaan kaedah tersebut untuk menyelesaikan masalah, sama ada dalam bidang matematik ataupun bidang lain seperti fizik, biologi, kimia dan sebagainya.

Dalam bab ini, beberapa kajian penting tentang kaedah PA akan dibincangkan supaya teori kaedah PA dapat difahami dengan lebih jelas. Kajian-kajian yang akan dibincangkan dibahagikan kepada empat bahagian iaitu fenomena sebutan hingar, polinomial Adomian, penumpuan kaedah PA dan perbandingan kaedah PA dengan kaedah lain.

2.2 Fenomena Sebutan Hingar

Sebutan hingar merupakan sebutan serupa yang muncul dalam dua komponen pertama siri penyelesaian kaedah penguraian Adomian (PA) u_0 dan u_1 dengan tatatanda berbeza. Fenomena sebutan hingar menerangkan sebutan hingar yang muncul dalam u_0 dan u_1 boleh dibatalkan daripada komponen tersebut dan sebutan yang tertinggal dalam u_0 merupakan penyelesaian kaedah PA yang menumpu kepada penyelesaian tepat, walaupun masih terdapat sebutan tertinggal dalam u_1. Dengan fenomena tersebut, penumpuan siri penyelesaian kepada penyelesaian tepat dapat dicapai dengan lebih cepat (Wazwaz, 1997).

Dengan mengaplikasikan kaedah PA terhadap persamaan pembezaan separa tak homogen, Adomian dan Rach (1992) mendapati wujudnya sebutan hingar dalam komponen siri penyelesaian kaedah PA. Mereka menyatakan fenomena tersebut hanya berlaku dalam penyelesaian persamaan pembezaan separa tak homogen sementara persamaan homogen tidak menunjukkan kehadiran sebutan hingar. Mereka juga mengemukakan syarat untuk kewujudan sebutan hingar iaitu ketidakhomogenan (Wazwaz, 1997) yang menerang bahawa sebutan hingar akan wujud sekiranya model masalah adalah tak homogen.

Syarat yang dikemukakan oleh Adomian dan Rach tidak disetujui oleh Wazwaz. Dengan mengaplikasikan kaedah PA terhadap persamaan pembezaan dan pengamiran yang berlainan bentuk dan berdasarkan keputusan kajian tersebut, Wazwaz (1997) menyata bahawa syarat Adomian dan Rach tidak dapat menjaminkan kewujudan sebutan hingar. Dengan itu, beliau mengemukakan beberapa syarat yang diwajibkan untuk kewujudan sebutan hingar berkesan antara komponen u_0 dan u_1.

Syarat yang dikemukakan oleh Wazwaz (1997) termasuk sebutan hingar berkesan wujud dalam persamaan pembezaan dan pengamiran tak homogen tertentu sahaja yang mana bukan semua persamaan tak homogen akan wujudnya sebutan hingar, sebutan hingar berkesan wujud jika dan hanya jika penyelesaian tepat muncul dalam u_0 secara tidak tersirat dan sebutan tertinggal dalam u_0 merupakan penyelesaian yang wajib memenuhi persamaan asal. Selain itu, beliau juga menerang bahawa ketidakhadiran penyelesaian tepat dalam u_0 akan menyebabkan kewujudan sebutan hingar tidak berkesan yang tidak dapat mempercepatkan penumpuan siri penyelesaian ataupun langsung tidak wujudnya sebutan hingar.

Berdasarkan syarat Wazwaz pada tahun 1997, kaedah PA diaplikasikan terhadap sistem persamaan pengamiran, sistem persamaan kamiran-pembezaan dan sistem persamaan pembezaan separa untuk mengkaji kehadiran sebutan hingar dalam sistem-sistem tersebut. Keputusan kajian tersebut menunjukkan syarat untuk kewujudan sebutan hingar dalam sistem tersebut adalah seperti mana yang diwajibkan untuk persamaan tak homogen iaitu penyelesaian tepat mesti hadir dalam komponen pertama siri penyelesaian (Wazwaz, 2003). Sebagai kesimpulan, Wazwaz (2003) menyatakan fenomena sebutan hingar hanya berlaku dalam masalah tak homogen yang memenuhi syarat diwajibkan tetapi tidak berlaku dalam masalah homogen. Sekiranya sebutan hingar wujud, penumpuan siri penyelesaian dapat dicapai dengan dua lelaran sahaja.

2.3 Pemerihalan Polinomial Adomian

Untuk kaedah penguraian Adomian (PA), pengoperasi tak linear dalam model masalah diuraikan kepada sebutan-sebutan yang membentuk siri fungsi yang mana setiap sebutan tersebut merupakan polinomial diperluaskan yang dikenali sebagai polinomial Adomian (Abbaoui & Cherruault, 1995). Seperti mana yang telah disebut sebelum ini, polinomial Adomian memainkan peranan penting dalam pembuktian penumpuan kaedah PA kerana polinomial Adomian yang menumpu memberikan siri penyelesaian kaedah PA yang menumpu (Abbaoui & Cherruault, 1995) dan sebaliknya. Oleh yang demikian, pengiraan polinomial Adomian merupakan kerja yang paling penting untuk siri penyelesaian kaedah PA (Babolian & Javadi, 2004). Walau bagaimanapun, pengiraan polinomial tersebut juga kerja paling sukar bagi langkah pengiraan kaedah PA. Oleh itu, banyak kajian telah dilakukan demi memudahkan kerja pengiraan polinomial tersebut.

Dengan berdasarkan formula pengiraan yang sebelumnya, Abbaoui *et al.* (1995) memperkenalkan satu formula yang lebih praktikal untuk mengira polinomial Adomian terutamanya untuk kes pembolehubah berganda. Dalam kajian tersebut, mereka memperluaskan kalkulus polinomial Adomian kepada sebarang peringkat dan membuktikan polinomial Adomian adalah lebih menyeluruh berbanding dengan polinomial Bell, satu polinomial yang diperkenalkan oleh E. T. Bell (Abbaoui *et al.*, 1995).

Selain itu, dalam kajian tersebut, Abbaoui *et al.* (1995) mendapati wujudnya satu hubungan antara polinomial Adomian dan polinomial Bell iaitu polinomial Bell boleh dikatakan sebagai polinomial Adomian satu pembolehubah. Dengan kata lain, untuk kes satu pembolehubah, polinomial Bell dapat diperolehi daripada polinomial Adomian dengan menentukan peringkat terbitan polinomial Adomian sebagai peringkat pertama. Sebagai kesimpulan, mereka menyata bahawa perluasan kalkulus polinomial Adomian tersebut dapat menyelesaikan persamaan terbentuk dengan operator secara mudah.

Selepas kajian perluasan polinomial Adomian kepada sebarang peringkat, Abbaoui *et al.* (1996) memperluaskan polinomial Adomian daripada perluasan tersebut kepada multidimensi dan mengaplikasikan formula baru tersebut terhadap persamaan Navier-Stokes. Aplikasi tersebut menunjukkan pendekatan multidimensi polinomial Adomian daripada kajian tersebut lebih efisien dan langkah pengiraan lebih mudah berbanding dengan polinomial Adomian yang diperolehi dengan kaedah Cauchy.

Selepas polinomial Adomian A_n, Adomian dan Rach (1996) memperkenalkan satu polinomial Adomian baru yang mana terubahsuai daripada polinomial Adomian asal dan dikenali sebagai polinomial Adomian terubahsuai $\overline{A_n}$. Polinomial baru tersebut juga membentuk siri Taylor perluasan seperti polinomial Adomian asal tetapi lebih sesuai untuk pengaturcaraan komputer berbanding dengan polinomial Adomian asal. Dalam kajian tersebut, mereka mendapati bahawa tiga komponen pertama untuk kedua-dua polinomial Adomian tersebut adalah sama dan semakin berbeza untuk komponen yang seterusnya.

Sebelum kajian Wazwaz, telah wujudnya pelbagai jenis kaedah dan formula untuk mengira polinomial Adomian. Tetapi Wazwaz (2000) berpendapat bahawa kaedah sebelum itu memerlukan langkah pengiraan yang panjang dan formula yang banyak. Oleh itu, beliau memperkenalkan satu algoritma baru untuk mengira polinomial Adomian untuk pengoperasi tak linear. Algoritma baru tersebut hanya memerlukan pengembangan operasi asas, aljabar, trigonometri atau pengembangan Taylor sahaja. Dalam kajian tersebut, algoritma Wazwaz (2000) dibuktikan dapat memberi pendekatan yang baik untuk pengiraan polinomial Adomian untuk pengoperasi tak linear yang berlainan bentuk termasuk polinomial tak linear, terbitan tak linear, trigonometri tak linear, hiperbolik tak linear, eksponen tak linear dan logaritma tak linear dengan tanpa formula diperlukan.

Algoritma Wazwaz pada tahun 2000 diperkembangkan untuk dituliskan dalam kod simbolik oleh Choi dan Shin (2003) kerana mereka berpendapat bahawa algoritma Wazwaz dapat memberi keputusan yang baik untuk pengoperasi tak linear yang berlainan bentuk tetapi tidak mudah dijalankan. Ini disebabkan algoritma Wazwaz melibatkan kerja pengiraan aljabar yang saiznya besar, sebutan trigonometri yang rumit dan peraturan penambahan yang unik. Dengan contoh pengoperasi tak linear yang berlainan bentuk iaitu polinomial tak linear dan terbitan tak linear, kod simbolik Choi dan Shin (2003) yang menggunakan perisian Mathematica dibuktikan merupakan cara yang baik dan sistematik untuk mengira polinomial Adomian dengan algoritma Wazwaz.

Berdasarkan algoritma Wazwaz pada tahun 2000, Biazar *et al.* (2003) memperkenalkan satu algoritma baru untuk mengira polinomial Adomian. Dengan mengaplikasikan algoritma baru tersebut terhadap beberapa contoh persamaan, Biazar *et al.* (2003) membuat kesimpulan bahawa algoritma baru tersebut lebih mudah dan boleh digunakan untuk kes yang lebih umum berbanding dengan algoritma Wazwaz.

Sebelum Abdelwahid (2003), polinomial Adomian diberi dengan tanpa formula matematik dan ini menyebabkan kesukaran untuk mengaplikasikan polinomial Adomian dan kaedah PA dengan berkesan dalam model masalah, khususnya untuk kes peringkat tinggi. Oleh itu, beliau memperkenalkan satu model matematik untuk polinomial Adomian. Model Abdelwahid tersebut dapat digunakan untuk menghasilkan polinomial Adomian pada sebarang peringkat dan sesuai untuk pengaturcaraan komputer. Selain itu, model matematik tersebut menggalakkan penyelidik untuk mengaplikasikan kaedah PA dengan berkesan terhadap masalah yang melibatkan polinomial Adomian peringkat tinggi.

Pada tahun yang seterusnya, satu lagi kaedah baru untuk mengira polinomial Adomian diperkenalkan oleh Babolian dan Javadi (2004). Dengan mengaplikasikan kaedah baru tersebut terhadap beberapa contoh pengoperasi tak linear iaitu polinomial tak linear, terbitan tak linear, masalah nilai sempadan dan fungsi logaritma, mereka memberikan kesimpulan bahawa kaedah baru tersebut sangat mudah dijalankan kerana melibatkan proses yang serupa untuk pembezaan fungsi biasa.

Selepas penulisan algoritma Wazwaz dalam kod simbolik oleh Choi dan Shin (2003), algoritma Biazar *et al.* (2003) juga dituliskan dalam kod simbolik oleh Pourdarvish (2006). Dua contoh pengoperasi tak linear digunakan dalam kajian tersebut iaitu polinomial tak linear dan terbitan tak linear. Aplikasi tersebut menunjukkan bahawa kaedah daripada kajian Pourdarvish (2006) adalah lebih mudah daripada kaedah Choi dan Shin. Ini disebabkan algoritma Biazar *et al.* dalam kajian Pourdarvish lebih mudah daripada algoritma Wazwaz dalam kajian Choi dan Shin.

Biazar dan kawan-kawannya memperbaiki lagi algoritma tersebut pada tahun 2006. Ini disebabkan sebelum itu aplikasi algoritma tersebut adalah terhad oleh andaian yang tertentu. Algoritma yang diperbaiki diaplikasikan terhadap beberapa contoh persamaan dan aplikasi tersebut menunjukkan bahawa algoritma baru hanya memerlukan satu andaian sahaja iaitu kehadiran pengembangan Taylor untuk siri polinomial Adomian dan andaian tersebut adalah terjamin (Biazar *et al.*, 2006). Selain itu, aplikasi tersebut juga menunjukkan kepelbagaian dan kesederhanaan algoritma baru tersebut.

2.4 Penumpuan Kaedah Penguraian Adomian

Sebenarnya kaedah penguraian Adomian (PA) merupakan satu kaedah yang sangat mudah. Kesukaran kaedah tersebut ialah pengiraan polinomial Adomian dan pembuktian penumpuan siri polinomial tersebut (Abbaoui & Cherruault, 1995). Oleh sebab penumpuan siri penyelesaian kaedah PA bergantung kepada penumpuan siri polinomial, jadi banyak usaha untuk memudahkan pembuktian penumpuan siri tersebut telah dilakukan.

Banyak cara yang dapat digunakan untuk membuktikan penumpuan siri polinomial Adomian tetapi kebanyakan cara yang digunakan tidak dapat membuktikan penumpuan secara terus (Abbaoui & Cherruault, 1995). Contohnya pembuktian

RUJUKAN

Abbaoui, K. & Cherruault, Y. 1995. New ideas for proving convergence of decomposition methods. *Computers and Mathematics with Applications* **29** (7): 103-108.

Abbaoui, K., Cherruault, Y., Adomian, G. & Rach, R. 1995. Further remarks on convergence of decomposition method. *International Journal of Bio-Medical Computing* **38**: 89-93.

Abbaoui, K., Cherruault, Y. & Seng, V. 1995. Practical formulae for the calculus of multivariable Adomian polynomials. *Math. Comput. Modelling* **22** (1): 89-93.

Abbaoui, K., Cherruault, Y. & Seng, V. 1996. Adomian's polynomials for nonlinear operators. *Math. Comput. Modelling* **24** (1): 59-65.

Abbasbandy, S. 2006. Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* **173**: 493-500.

Abdelwahid, F. 2003. A mathematical model of Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation* **141**: 447-453.

Adomian, G. 1998. Analytic solution of nonlinear integral equations of Hammerstein type. *Appl. Math. Lett.* **11** (3): 127-130.

Adomian, G. & Rach, R. 1992. Noise terms in decomposition series solution. *Computers Math. Appl.* **24** (11): 61-64.

Adomian, G. & Rach, R. 1996. Modified Adomian polynomials. *Math. Comput. Modelling* **24** (11): 39-46.

Ahmad, P. 2006. A reliable symbolic implementation of algorithm for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation* **172**: 545- 550.

Akbar, H. B., Ali, V. K. & Hamed, H. M. 2006. A different approach for solving the nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation* **173**: 724-735.

Alice, G. 2006. A comparison between Cole-Hopf transformation and the decomposition method for solving Burgers' equations. *Applied Mathematics and Computation* **173**: 126-136.

Babolian, E. & Biazar, J. 2002. On the order of convergence of Adomian method. *Applied Mathematics and Computation* **130**: 383-387.

Babolian, E. & Javadi, Sh. 2004. New method for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation* **153**: 253-259.

Biazar, J., Babolian, E., Kember, G., Nouri, A. & Islam, R. 2003. An alternate algorithm for computing Adomian polynomials in special cases. *Applied Mathematics and Computation* **138**: 523-529.

Biazar, J. & Ebrahimi, H. 2005. An approximation to the solution of hyperbolic equations by Adomian decomposition method and comparison with characteristics method. *Applied Mathematics and Computation* **163**: 633-638.

Biazar, J., Ilie, M. & Khoshkenar, A. 2006. An improvement to an alternate algorithm for computing Adomian polynomials in special cases. *Applied Mathematics and Computation* **173**: 582-592.

Brunner, H. 2004. *Collacation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations*. Cambridge University Press, Cambridge.

Choi, H. W. & Shin, J. G. 2003. Symbolic implementation of the algorithm for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation* **146**: 257-271.

Ismail, H. N. A., Raslan, K. R., Salem, G. S. E. & Rabboh, A. A. A. 2005. Comparison study between restrictive Taylor, restrictive Padé approximation and Adomian decomposition method for the solitary wave solution of the general KdV equation. *Applied Mathematics and Computation* **167**: 849-869.

Kaya, D. & Inan, I. E. 2005. A convergence analysis of the ADM and an application. *Applied Mathematics and Computation* **161**: 1015-1025.

Kamel, al-Khaled, Kaya, D. & Noor, M. A. 2004. Numerical comparison of methods for solving parabolic equations. *Applied Mathematics and Computation* **157**: 735-743.

Lee, P. Y. & Vyborny, R. 2000. *The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*. Cambridge University Press, Cambridge.

Lesnic, D. 2002. Convergence of Adomian's decomposition method: Periodic Temperatures. *Computers and Mathematics with Applications* **44**: 13-24.

Luo, X. G. 2005. A two-step Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* **170**: 570-583.

Salah, M. El-Sayed & Kaya, D. 2003. Comparing numerical methods for Helmholtz equation model problem. *Applied Mathematics and Computation* **150**: 763-773.

Salah, M. El-Sayed & Mohammedi, R. Abdel-Aziz, 2003. A comparison of Adomian's decomposition method and wavelet-Galerkin method for solving integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation* **136**: 151-159.

Salah, M. El-Sayed & Wazwaz, A. M. 2001. A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation* **122**: 393-405.

Wang, W. M. 2006. A mechanical algorithm for solving the Volterra integral equation. *Applied Mathematics and Computation* **172**: 1323-1341.

Wazwaz, A. M. 1997. Necessary conditions for the appearance of noise terms in decomposition solution series. *Applied Mathematics and Computation* **81**: 265-274.

Wazwaz, A. M. 1998. A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions. *Applied Mathematics and Computation* **97**: 37-44.

Wazwaz, A. M. 1999. A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* **102**: 77-86.

Wazwaz, A. M. 2000. A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation* **111**: 53-69.

Wazwaz, A. M. 2003. The existence of noise terms for systems of inhomogeneous differential and integral equations. *Applied Mathematics and Computation* **146**: 81-92.

Wazwaz, A. M. 2006. A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations. *Applied Mathematics and Computation* **181**: 1703-1712.