PEMFAKTORAN POLINOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN KAEDAH LEMA HENSEL

AVILA JULIUS GIDONG

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2008

PUMS99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: PEMFAKTORAN POLINOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN KAEDAH LEMA HENSEL

IJAZAH: SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK

SAYA AVILA JULIUS GIDONG SESI PENGAJIAN: 2007/2008

(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPSM/~~Sarjana/Doktor Falsafah~~) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institutsi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

[ ] SULIT (Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau Kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)

[ ] TERHAD (Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)

[/] TIDAK TERHAD

Disahkan Oleh

(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: BLOK H-3-5, FASA 3B, TAMAN PURI WARISAN, JALAN JNANAM, 88450 KOTA KINABALU.

DR. AINI JANTENG
Nama Penyelia

Tarikh: 30 APRIL 2008

Tarikh: 30 APRIL 2008

CATATAN:- *Potong yang tidak berkenaan.
**Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa /organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.
@Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

30 April 2008

AVILA JULIUS GIDONG
HS2005-3708

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA PROJEK 1**
   (ENCIK RAJASEGARAN RAMASAMY) ______________

2. **PENYELIA PROJEK 2**
   (DR. AINI JANTENG) ______________

3. **PEMERIKSA 1**
   (PUAN SUZELAWATI ZENIAN) ______________

4. **PEMERIKSA 2**
   (ENCIK VICTOR TIONG KUNG MING) ______________

5. **DEKAN**
   (SUPT/KS. PROF. MADYA DR. SHARIFF A.K OMANG) ______________

PENGHARGAAN

Pertama sekali, saya ingin mengucapkan syukur dan terima kasih kepada Tuhan kerana telah memberikan kekuatan kepada saya untuk menyiapkan disertasi ini.

Saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada bekas penyelia saya, Encik Rajasegaran Ramasamy terhadap penyeliaan, tunjuk ajar, bantuan, bimbingan, semangat, idea dan pendapat yang telah diberikan semasa saya membuat Projek 1. Saya juga ingin mengucapkan terima kasih kepada penyelia bagi Projek 2 saya iaitu Dr. Aini Janteng kerana telah memberikan pendapat dan membantu saya memperbaiki lagi cara penulisan disertasi saya sehingga saya berjaya menyiapkan disertasi ini.

Saya juga ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pensyarah yang telah banyak mengajar dan membantu saya semasa saya menuntut di Universiti Malaysia Sabah.

Seterusnya, saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada keluarga saya, kawan-kawan dan teman-teman seperjuangan terhadap semangat dan bantuan yang telah diberikan dalam tempoh saya menyiapkan disertasi ini.

Akhir sekali, saya ingin mengucapkan terima kasih kepada sesiapa sahaja yang telah membantu saya secara langsung atau tidak langsung dalam menyiapkan disertasi ini.

Terima kasih.

ABSTRAK

Pemfaktoran polinomial adalah satu proses untuk mencari faktor-faktor bagi persamaan polinomial yang diberi. Terdapat pelbagai kaedah telah digunakan untuk memfaktorkan polinomial. Antaranya adalah mencari faktor sepunya, pembahagian panjang dan kaedah sintetik. Kebanyakan kaedah yang telah digunakan dalam pemfaktoran polinomial tidak mempertimbangkan nilai-nilai modular apabila satu persamaan polinomial diberi. Seorang ahli matematik Jerman, Kurt Hensel telah memperkenalkan kaedah Lema Hensel dalam menyelesaikan masalah pemfaktoran polinomial dengan mengambil kira nilai modular. Oleh itu, kajian ini akan mengkaji kaedah Lema Hensel dalam pemfaktoran polinomial dengan mengambil kira nilai modular dan seterusnya mengaplikasikan kaedah Lema Hensel dalam pemfaktoran polinomial berdarjah $n = 2, 3$ dan 4 dan dengan nilai bagi modular dihadkan kepada darjah $2 \leq k \leq 3$.

ABSTRACT

Polynomial factorization is a process to find factors for the given polynomial equation. There are many methods that had been used in polynomial factorization such as finding the common factor, long division and synthetic method. The methods that had been used previously did not consider with the value of the modular when a polynomial equation are given. A German mathematician, Kurt Hensel had introduced Hensel's Lemma method to solve the problems of polynomial factorization where the value of the modular is considered. Therefore, this research will observe Hensel's Lemma method in polynomial factorization where the value of modular is considered and to apply Hensel's Lemma method in polynomial factorization power of $n = 2, 3, \text{and } 4$ and the value of the modular had been limited to $2 \leq k \leq 3$.

KANDUNGAN

Muka Surat

PENGAKUAN		ii
PENGESAHAN		iii
PENGHARGAAN		iv
ABSTRAK		v
ABSTRACT		vi
SENARAI KANDUNGAN		vii
SENARAI JADUAL		ix
SENARAI RAJAH		x
SENARAI SIMBOL		xi
BAB 1	**PENDAHULUAN**	1
1.1	Pengenalan	1
1.2	Kaedah Pemfaktoran Polinomial	5
	1.2.1 Mencari Faktor Sepunya	5
	1.2.2 Pembahagian Panjang	8
	1.2.3 Kaedah Sintetik	9
1.3	Objektif Kajian	11
BAB 2	**ULASAN LITERATUR**	12
2.1	Pengenalan	12
2.2	Kaedah Mencari Faktor Sepunya	12
2.3	Lema Hensel dengan Matriks Sylvester	15
2.4	Algoritma Pemfaktoran Generik	17
2.5	Algoritma Berlekamp	19
BAB 3	**METODOLOGI KAJIAN**	22
3.1	Pengenalan	22
3.2	Sifat-sifat Lema Hensel	22
	3.2.1 Kebolehbahagian	23

	3.2.2 Kesamaan	40
3.3	Penyelesaian dengan menggunakan Lema Hensel	47
BAB 4	**HASIL KEPUTUSAN**	53
4.1	Pengenalan	53
4.2	Penyelesaian menggunakan kaedah Lema Hensel	53
	4.2.1 Penyelesaian unik	54
	4.2.2 Penyelesaian bukan unik	60
	4.2.3 Contoh penyelesaian menggunakan Korolari 3.3.1	65
BAB 5	**PERBINCANGAN, KESIMPULAN DAN CADANGAN**	68
5.1	Perbincangan	68
5.2	Kesimpulan	70
5.3	Cadangan	70
RUJUKAN		72

SENARAI JADUAL

No. Jadual		Muka Surat
1.1	Nama polinomial mengikut darjah pekali permulaan	2
1.2	Nama polinomial mengikut bilangan pembolehubah	2

SENARAI RAJAH

No. Rajah		Muka Surat
2.1	Matriks Sylvester	15

SENARAI SIMBOL

$=$	sama dengan
$\neq$	tidak sama dengan
$\geq$	lebih besar atau sama dengan
$-$	tolak
$+$	tambah
$\in$	adalah unsur kepada
Σ	hasil tambah
∞	infiniti
$\parallel$	selari dengan
$\mid$	membahagi
$\nmid$	tidak membahagi
$\lvert\ \rvert$	bar nilai mutlak
$\mathbb{Z}$	integer
$\mathbb{Q}$	nombor nisbah
$\mathcal{B}_q$	sub-aljabar Berlekamp
$\{\ \}$	ikatan (simbol kumpulan)
$\Leftrightarrow$	setara
$\equiv$	kesamaan
$\not\equiv$	bukan kesamaan
$\forall$	untuk semua
$\cong$	adalah sama kepada
$\times$	darab
$(\ )$	tanda kurung (simbol kumpulan)
Π	hasil darab
$:$	kolon, di mana
$>$	lebih besar
$+$	tanda tambah tolak
$\cdots$	tanda sambungan

$\vdots$	tanda sambungan
$\ddots$	tanda sambungan
$\leq$	lebih kecil atau sama dengan
$<$	lebih kecil
!	faktorial
[ ]	kurungan (simbol kumpulan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Polinomial adalah satu siri berkuasa n dan ditulis dalam bentuk,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0,$$

dengan $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ adalah integer dengan $a_n \neq 0$ dan n adalah integer positif. a_n adalah pekali permulaan (Yang dan Zuhaidi, 2004). Polinomial mempunyai nama yang berbeza mengikut darjahnya. Ini dapat dijelaskan dalam Jadual 1.1 menurut Yang dan Zuhaidi (2004).

Suatu polinomial boleh mempunyai lebih daripada satu pembolehubah selain daripada x, contohnya $4xy$ dan $6x^2yz + 3yz$. Jadual 1.2 menunjukkan nama-nama bagi polinomial (Yang dan Zuhaidi, 2004).

Jadual 1.1 Nama polinomial mengikut darjah pekali permulaan

Darjah	Nama	Contoh	Pekali permulaan
0	Pemalar	$P(x) = 6$	6
1	Linear	$P(x) = 3x + 4$	3
2	Kuadratik	$P(x) = -6x^2 + 5x + 3$	-6
3	Kubik	$P(x) = 16x^3 + 8x^2 - 7x + 7$	16
4	Kuartik	$P(x) = -4x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 4x - 3$	-4
5	Kuintik	$P(x) = 2x^5 + 4x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 3x + 5$	2
6	Sextik/Hexik	$P(x) = 7x^6 - 8x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$	7
7	Septik/Heptik	$P(x) = -8x^7 - 7x^6 + 2x^5 + 9x^4 - 10x^3 - 11x^2 + 3x - 15$	-8
8	Oktik	$P(x) = -13x^8 - 17x^7 + 5x^6 + 8x^5 - 9x^4 + 5x^3 - 23x^2 + 8$	-13
9	Nonik	$P(x) = 8x^9 + 4x^8 + 13x^7 - 6x^6 - 5x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 7x + 67$	8
10	Desik	$P(x) = -5x^{10} + 8x^9 - 54x^8 + 17x^7 - 12x^6 + 5x^5 - 6x^4 + 19x^3 - 8x^2 + 12x - 8$	-5

Jadual 1.2 Nama polinomial mengikut bilangan pembolehubah

Polinomial	Nama	Darjah
$4xy$	Monomial	$1 + 1 = 2$
$6x^2yz + 3yz$	Binomial	$2 + 1 + 1 = 4$
$2xy + yz^3 + x^2z$	Trinomial	$1 + 3 = 4$

Berdasarkan Jadual 1.2, darjah kepada polinomial adalah ditentukan melalui pembolehubah dengan darjah tertinggi dengan menambahkan setiap darjah tertinggi pembolehubah tersebut.

Nilai pembolehubah dalam sesuatu polinomial dapat dicari dengan memfaktorkan polinomial tersebut. Sebelum melakukan pemfaktoran polinomial, maksud pemfaktoran nombor harus diketahui terlebih dahulu kerana pemfaktoran nombor adalah asas kepada pemfaktoran polinomial.

Pemfaktoran nombor adalah satu proses untuk mencari faktor-faktor bagi nombor yang diberi dengan mendarabkan faktor-faktor tersebut untuk mendapatkan nombor asal semula. Contohnya, mencari faktor 14. Rujuk Contoh 1.1.

Contoh 1.1:

Faktor-faktor bagi nombor 14 adalah

a) $14 = (7)(2)$

b) $14 = \left(\frac{1}{2}\right)(28)$

c) $14 = (-7)(-2)$

d) $14 = (-7)(-1)(2)$

Contoh-contoh di atas adalah sebahagian daripada penyelesaian kepada pemfaktoran nombor 14 kerana terdapat banyak cara lain yang boleh digunakan untuk mencari faktor 14.

Bagi memastikan bahawa sesuatu pemfaktoran telah selesai, harus dipastikan bahawa nombor yang diberi telah difaktorkan dengan lengkap. Ini bermakna, nombor yang telah diberi telah difaktorkan dengan menggunakan nombor-nombor perdana. Nombor perdana adalah suatu nombor yang hanya boleh dibahagikan dengan 1 dan dirinya sendiri sahaja. Contoh-contoh nombor perdana adalah 2, 3, 5, dan 7.

Setelah mengetahui maksud polinomial dan pemfaktoran nombor, maka pemfaktoran polinomial boleh dijalankan. Bagi memfaktorkan sesuatu polinomial, konsep atau idea pemfaktoran nombor biasa boleh digunakan.

Di dalam memfaktorkan polinomial, ungkapan-ungkapan linear akan dicari supaya apabila didarabkan maka diperoleh kembali persamaan polinomial yang diberi akan dicari. Contohnya,

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Apabila diberi $n \geq 3$ di mana n adalah darjah kepada polinomial, setiap pembolehubah yang didapati pada persamaan (1.1) dan seterusnya akan difaktorkan sehingga pembolehubah tersebut tidak dapat difaktorkan lagi. Keadaan ini menunjukkan bahawa polinomial tersebut telah lengkap difaktorkan. Contohnya,

$$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)(x^2 - 4) \tag{1.1}$$

$$= (x^2 + 2)(x + 2)(x - 2) \tag{1.2}$$

Persamaan (1.2) tidak dapat difaktorkan lagi. Maka, polinomial tersebut telah difaktorkan dengan lengkap.

Tujuan utama sesuatu polinomial difaktorkan adalah untuk mendapatkan nilai pembolehubah polinomial tersebut yang mana apabila nilai pembolehubah tersebut dimasukkan dalam persamaan asal, maka akan diperolehi penyelesaian kepada polinomial yang diberi adalah sifar.

1.2 Kaedah Pemfaktoran Polinomial

Terdapat 3 kaedah yang biasa digunakan untuk memfaktorkan polinomial iaitu mencari faktor sepunya, pembahagian panjang dan kaedah sintetik. Kaedah-kaedah ini akan diterangkan secara terperinci seperti berikut.

1.2.1 Mencari Faktor Sepunya

Menurut Lee dan Tan (2005), bagi memfaktorkan polinomial dengan menggunakan kaedah ini, tiga langkah berikut harus dipatuhi iaitu:

a) cari faktor sepunya tertinggi;

b) letakkan faktor sepunya tertinggi di depan kurungan; dan

c) letakkan baki faktor yang ada di dalam kurungan.

Contoh 1.2:

Diberi $x^2 - 4x + 3$. Maka, kita dapat tulis persamaan ini dalam bentuk $x^2 - x - 3x + 3$. Dengan menggunakan kaedah mencari faktor sepunya, kita dapat faktorkan polinomial ini kepada

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3x + 3 &= (x^2 - x) - (3x - 3) \\ &= x(x - 1) - 3(x - 1) \\ &= (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

Maka, diperolehi bahawa faktor bagi $x^2 - x - 3x + 3$ adalah $(x - 1)$ dan $(x - 3)$.

Di bawah kaedah yang sama, terdapat cara lain untuk mencari nilai-nilai faktor bagi polinomial tanpa mengubah atau mengembangkan persamaan polinomial yang diberi iaitu dengan menggunakan kaedah cuba-cuba untuk mencari penyelesaian.

Cara untuk melakukannya adalah,

Faktor kepada a^2	Faktor kepada b^2
(i) a (ii) a	b (iii) b (iv)

Darabkan pembolehubah (i) dengan pembolehubah (iv) dan pembolehubah (ii) dengan pembolehubah (iii). Kemudian, tambahkan hasil darab tadi,

$$ab + ab = 2ab \tag{1.3}$$

Darabkan pembolehubah (i) dengan pembolehubah (ii) dan pembolehubah (iii) dengan pembolehubah (iv). Seterusnya, masukkan nilai yang diperolehi dalam persamaan (1.3) ke dalam persamaan baru yang dibentuk untuk menjadi polinomial $a^2 + b^2 + 2ab$ atau ditulis sebagai $a^2 + 2ab + b^2$.

Lihat contoh berikut:

Contoh 1.3:

Pertimbangkan persamaan $x^2 - 4x + 3$.

Kaedah cuba-cuba 1

Faktor kepada x^2	Faktor kepada 3
x	3
x	1

Diperolehi $x + 3x = 4x$ (persamaan tidak dipenuhi). Maka, kaedah cuba-cuba 2 harus dilakukan.

Kaedah cuba-cuba 2

Faktor kepada x^2	Faktor kepada 3
x	-3
x	-1

Diperolehi $-x - 3x = -4x$ (persamaan dipenuhi). Maka, telah diperolehi faktor bagi persamaan $x^2 - 4x + 3$ adalah sama dengan $(x - 1)$ dan $(x - 3)$.

1.2.2 Pembahagian Panjang

Menurut Yang dan Zuhaidi (2004), apabila polinomial $P(x)$ dibahagikan dengan $D(x)$, ini akan menghasilkan hasil bahagi $Q(x)$ dan bakinya $R(x)$. Maka,

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

atau ditulis sebagai $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$, di mana darjah $P(x) \geq$ darjah $D(x)$.

Jika $P(x)$ adalah berdarjah n dan $D(x)$ adalah berdarjah m dengan $n \geq m$, maka $Q(x)$ adalah $(n - m)$.

Contoh 1.4:

Diberi $(x^2 - 4x + 3) \div (x + 1)$. Dengan menggunakan pembahagian panjang, didapati bahawa,

$$\begin{array}{r|l} & \quad\; x-5 \\ \hline x+1 & x^2-4x+3 \\ & -(x^2+x) \\ \hline & \quad -5x+3 \\ & -(-5x-5) \\ \hline & \qquad\; 8 \end{array}$$

Maka,

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = (x - 5) + \frac{8}{(x + 1)}$$

atau

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 5)(x + 1) + 8$$

dengan $P(x) = x^2 - 4x + 3$ berdarjah 2, $Q(x) = x - 5$ berdarjah 1, $D(x) = x + 1$ yang juga berdarjah 1, dan $R(x) = 8$ yang berdarjah 0.

1.2.3 Kaedah Sintetik

Menurut Yang dan Zuhaidi (2004), selain daripada menyelesaikan dengan menggunakan pembahagian panjang, masalah pemfaktoran polinomial dapat juga diselesaikan dengan menggunakan kaedah sintetik.

Cara menggunakan kaedah sintetik ditunjukkan di bawah:

$$\begin{array}{c|ccc} a & b & c & d \\ + & & e & f \\ \hline & g & h & i \end{array}$$

Nilai a diperoleh daripada nilai pembahagi yang diberi. Nilai b, c dan d adalah daripada persamaan polinomial yang diberikan. Nilai g diperolehi daripada nilai b. Nilai e diperolehi apabila $a \times g$ dan begitu juga dengan nilai f yang diperolehi daripada $a \times h$. Nilai i diperolehi hasil daripada $d + f$. Nilai bagi g dan h adalah mewakili $Q(x)$ dan nilai i mewakili nilai $R(x)$. Lihat Contoh 1.5:

Contoh 1.5:

Diberi $(x^2 - 4x + 3) \div (x + 1)$. Dengan menggunakan kaedah sintetik, maka diperolehi

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & -4 & 3 \\ & + & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -5 & 8 \end{array}$$

dengan nilai $Q(x) = x - 5$ dan nilai $R(x) = 8$.

Tiga kaedah yang ditunjukkan adalah kaedah biasa untuk memfaktorkan polinomial iaitu tanpa mengambil kira nilai modular sekiranya diberi. Oleh itu, dalam kajian ini, satu kaedah telah diperkenalkan dan diaplikasikan untuk memfaktorkan polinomial yang mengambil kira nilai modular yang diberi. Kaedah yang akan dikaji dalam kajian ini dikenali sebagai kaedah Lema Hensel.

1.3 Objektif Kajian

Terdapat 2 objektif yang hendak dicapai dalam kajian ini.

1. Mengkaji kaedah Lema Hensel dalam pemfaktoran polinomial dengan mengambil kira nilai modular.
2. Mengaplikasikan kaedah Lema Hensel dalam pemfaktoran polinomial berdarjah $n = 2, 3, 4$ dan dengan nilai bagi modular dihadkan kepada darjah $2 \leq k \leq 3$.

RUJUKAN

Apostol, T.M., 1995. Undergraduate Texts in Mathemathics. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag. New York. 14-20, 112-117.

A-Anh Compton's Encyclopedia & Fact-Index, 1995. Compton's Learning Company. Chicago. 285-301.

Dawkins, P., 2007. *Paul's Online Mathemathics Note (Factoring Polynomials)*, http://tutorial.math.lamar.edu/classes/alg/factoring.aspx

Dewan Bahasa dan Pustaka, Kuala Lumpur, 1981. *Senarai Istilah Matematik.*

Dr. Mark, 2007. *The Mathematics Forum@Drexel (Polynomials)*, http://mathforum.org/library/drmath/view/56413.html.

Gathen, J. V. Z. dan Hartlieb, S., 1998. Factoring Modular Polynomials. *J. Symbolic Computation* **26** (1998). 583-606.

Genovese, G., 2006. Improving the algorithms of Berlekamp and Niederreiter for factoring polynomials over finite fields. *Journal of Symbolic Computation* **42** (2007). 159-177.

Lee, B.H. dan Tan, J., 2005. Studi Terbaik. *Mathematics Form 1, 2, 3.* SNP PanPac (M) Sdn. Bhd, Selangor Darul Ehsan.

M-Meta Compton's Encyclopedia & Fact-Index, 1995. Compton's Learning Company. Chicago. 212-221.

Niven, I., Zuckerman, H. S. dan Montgomery, H.L., 1991. *An Introduction to the Theory of Numbers Fifth Edition.* John Wiley & Sons, Inc. Canada. 5-11, 48.

Pohst, M. E., 2004. Factoring polynomials over global fields I. *Journal of Symbolic Computation* **39** (2007). 617-630.

Rosen, K. H., 2005. *Elementary Number Theory and its applications Fifth Edition.* AT&T Laboratories and Kenneth H. Rosen. 98, 141-143, 154, 168-173.

Schumer, P.D., 1995. *Introduction to number theory.* International Thomson Publishing. United States, America. 53.

Yang, C.C. dan Zuhaidi Mukrim, 2004. *Matriculation Mathematics*. Higher Learning. Selangor. 78-81.