PECAHAN BERLANJAR BAGI NOMBOR BUKAN NISBAH KUADRATIK

TAN SIEW HONG

DISERTASI YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH
SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2007

PUMS 99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: PECAHAN BERLANJAR BAGI NOMBOR BUKAN NISBAH KUADRATIK

Ijazah: IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

SESI PENGAJIAN: 2004/2005 Sem 6

Saya TAN SIEW HONG

(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPS/Sarjana/Doktor Falsafah)* ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. **Sila tandakan (/)

/	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)
	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
	TIDAK TERHAD	

Disahkan oleh

(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: 28 Jalan Muda 24
Off Jalan Meru, 41050 Klang
Selangor Darul Ehsan

Nama Penyelia

Tarikh: 19/04/07

Tarikh:

CATATAN: * Potong yang tidak berkenaan.

** Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa/organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.

@ Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan, atau disertasi bagi pengajian secara kerja kursus dan penyelidikan, atau Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

12 Mac 2007

TAN SIEW HONG

HS2004-2734

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**
   (ENCIK RAJASEGERAN A/L RAMASAMY) ____________

2. **PEMERIKSA**
   (CIK KHADIZAH GHAZALI) ____________

3. **DEKAN**
   (SUPT/KS PROF. MADYA DR. SHARIFF A. K. OMANG) ____________

PENGHARGAAN

Saya mengambil kesempatan ini untuk mengucapkan setinggi-tinggi penghargaan dan ribuan terima kasih kepada Encik Rajasegeran a/l Ramasamy selaku penyelia saya yang telah memberikan banyak tunjuk ajar dan bimbingan kepada saya sepanjang proses menghasilkan kajian ilmiah ini. Tanpa tunjuk ajar beliau, kajian ilmiah ini semestinya sukar untuk diteruskan dan disiapkan tepat pada masanya.

Tidak lupa juga kepada ibu dan bapa saya yang telah bersusah payah untuk menyekolahkan saya sehingga ke menara gading. Tanpa mereka, tanpalah saya. Terima kasih yang tak terhingga ditujukan khas kepada keluarga tersayang ke atas didikan, dorongan, bantuan kewangan dan kasih sayang yang dicurahkan kepada saya.

Selain itu, saya juga ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada Khor Choo Chiang yang telah memberikan dorongan kepada saya sepanjang pengajian saya di Universiti Malaysia Sabah.

Ribuan terima kasih juga ditujukan kepada rakan-rakan serumah iaitu Hui Keow, Sui Ling, Chia Keng dan Tee Wei yang sentiasa menghulurkan bantuan dan dorongan secara langsung atau tidak langsung kepada saya sepanjang proses pengajian di Universiti Malaysia Sabah.

Semoga mereka sentiasa diberkati oleh Tuhan dan sihat walafiat sepanjang masa. Sekian, terima kasih.

ABSTRAK

Kajian ilmiah ini membincangkan pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik. Nombor-nombor bukan nisbah kuadratik yang dikaji dalam kajian ilmiah ini adalah nombor-nombor yang mempunyai penyebut bernilai satu. Dalam kajian ilmiah ini, pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik dihasilkan dan pecahan berlanjar yang terhasil kemudiannya dideduksikan untuk mendapatkan corak umumnya. Proses pengembangan pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik adalah berdasarkan kepada proses pengembangan pecahan berlanjar bagi nombor nisbah. Konvergen bagi nombor bukan nisbah kuadratik diperoleh berdasarkan kepada konvergen nombor nisbah. Dengan itu, nombor bukan nisbah kuadratik dapat diungkapkan dalam bentuk pecahan berlanjar. Hasil kajian mendapati bahawa pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik ialah pecahan berlanjar berkala. Dalam kajian ilmiah ini, dapat dideduksikan bahawa setiap nombor bukan nisbah kuadratik yang mempunyai $\sqrt{D}$ yang sama hanya berbeza dari segi hasil bahagi separa yang pertama suatu pecahan berlanjar berkala adalah berlainan, dengan syarat D ialah nombor integer positif yang bukan kuasa dua sempurna. Selain itu, dapat diperhatikan bahawa terdapat perkaitan antara nombor-nombor bukan nisbah kuadratik dengan berdasarkan kepada pecahan berlanjar yang telah dihasilkan. Perkaitan tersebut diungkapkan dalam bentuk persamaan. Pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik boleh diperoleh secara terus dengan menggantikan nilai x yang sepadan ke dalam persamaan yang mewakili perkaitan tersebut dengan x ialah sebarang nombor integer positif.

CONTINUED FRACTION OF QUADRATIC IRRATIONAL NUMBER

ABSTRACT

This study discussed the continued fraction of quadratic irrational number. The quadratic irrational numbers studied here are those numbers with the denominator value of one. The objectives of this study are to compute the quadratic irrational numbers in the form of continued fractions and deduce the continued fractions found in quadratic irrational numbers to get its general pattern. The process of computing quadratic irrational numbers in the form of continued fractions is based on the process of computing rational numbers in term of continued fractions. The convergents of quadratic irrational numbers are derived from the convergents of rational numbers. Hence, quadratic irrational numbers can be written in the form of continued fractions. Study's results shown that the continued fractions of quadratic irrational numbers are periodic continued fractions. From the results achieved in this study, it can be deduced that for every quadratic irrational number which has the same $\sqrt{D}$ where D represents the positive integer number that is not perfect square, are different in term of the first partial quotient in the continued fractions are not the same whilst the remaining partial quotients are same. Apart from this, results shown that there are relationships between the different numbers of D in $\sqrt{D}$. Thus, new equations that represented the relationships between the different numbers of D in $\sqrt{D}$ are derived based on the results found in this study. The continued fractions of quadratic irrational numbers can be computed in advance by using the equations that represented the relationships. This is done by substituting the relevant x value directly into the equations with number x represents as any positive integer numbers.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI SIMBOL

$+$	tatatanda tambah
$-$	tatatanda tolak
$\pm$	tatatanda tambah tolak
$\geq$	lebih atau sama dengan
$\leq$	kurang atau sama dengan
$\mathbb{Q}$	set nombor nisbah
e	eksponen
log	logaritma
$=$	tatatanda sama dengan
$\cdot$	tatatanda darab
$\sum$	hasil tambah

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Pecahan berlanjar mula berkembang pada akhir 1600an dan awal 1700an. Namun begitu, terdapat fakta yang menyatakan bahawa pecahan berlanjar mula ditemui melalui Matematik pada 2000 tahun yang lepas (Tuyl, 1998).

Pelbagai kajian tentang pecahan berlanjar telah pun dijalankan di luar negara sejak pecahan berlanjar ditemui melalui Matematik pada 2000 tahun yang lepas. Walaupun kajian tentang pecahan berlanjar giat dijalankan di luar negara, namun begitu kajian tentang pecahan berlanjar adalah terhad di negara Malaysia. Hal ini kerana pecahan berlanjar tidak pernah diajar di sekolah rendah, menengah, mahupun kolej dan universiti tempatan. Oleh itu, tujuan kajian ilmiah ini dihasilkan adalah untuk memperkenalkan pecahan berlanjar dan memberi kesedaran kepada para pelajar tentang pecahan berlanjar. Pecahan berlanjar sesuai untuk dipelajari oleh para pelajar kerana pecahan berlanjar boleh digunakan untuk mencari nisbah terhampir bagi nombor nyata dan membuat penganggaran bagi nombor bukan nisbah.

1.1.1 Sejarah Perkembangan Pecahan Berlanjar

Sejarah perkembangan pecahan berlanjar bermula pada zaman pembentukan Algoritma Euclid. Algoritma Euclid digunakan untuk mencari pembahagi sepunya terbesar bagi dua nombor nyata. Pecahan berlanjar mudah adalah lanjutan daripada Algoritma Euclid. Oleh itu, pembentukan Algoritma Euclid boleh dikatakan sebagai titik permulaan untuk pembangunan pecahan berlanjar. Pecahan berlanjar mudah boleh dihasilkan dengan memanipulasikan Algoritma Euclid secara algebra (Rockett & Szüsz, 1992).

Sejak dahulu lagi, sebarang kajian yang melibatkan pecahan berlanjar sentiasa disertakan dengan contoh yang spesifik. Hal ini kerana penggunaan contoh yang spesifik dapat meningkatkan pemahaman dan memberikan penerangan yang lebih terperinci. Sebagai contoh, seorang ahli Matematik yang berasal dari India iaitu Aryabhata telah menggunakan suatu pecahan berlanjar dengan contoh yang spesifik untuk menyelesaikan persamaan linear tak tentu (Olds, 1963).

Selain itu, penggunaan pecahan berlanjar juga ditemui dalam penulisan Matematik di negara Arab dan Greek. Akan tetapi, penggunaan pecahan berlanjar adalah terhad. Rafael Bombelli yang dilahirkan pada tahun 1530 dan Pietro Antonio Cataldi (1548-1626) yang berasal dari Bandar Bologna, Itali juga telah memberikan sumbangan yang berharga dalam perkembangan bidang pecahan berlanjar. Rafael Bombelli dan Pietro Antonio Cataldi masing-masing telah mengungkapkan punca kuasa 13 dan punca kuasa 18 dalam bentuk pecahan berlanjar yang berulang iaitu

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \dots}}$$

dan

$$\sqrt{18} = 4 \cdot \& \frac{2}{8\cdot} \& \frac{2}{8\cdot} \& \frac{2}{8\cdot} \cdots$$

(Olds, 1963).

Pecahan berlanjar terus berkembang setelah John Wallis menghasilkan buku yang berjudul "*Arithmetica Infinitorum*" pada tahun 1655. Beliau memperkenalkan identiti

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots}.$$

Identiti tersebut kemudiannya diubah oleh Lord Brouncker (1620-1684) kepada bentuk

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \cdots}}}}}$$

(Olds, 1963).

Justeru itu, Wallis mengambil inisiatif untuk mengitlakkan teori pecahan berlanjar. Beliau mengemukakan kaedah untuk mendapatkan konvergen ke n iaitu pecahan berlanjar yang mempunyai hasil bahagi separa sebanyak n kali dalam bukunya yang berjudul "*Opera Mathematica*" pada tahun 1695. Beliau merupakan orang yang pertama sekali menggunakan perkataan pecahan berlanjar (Olds, 1963).

Pecahan berlanjar dipraktikkan buat pertama kalinya oleh ahli Matematik dan ahli Astronomi Belanda iaitu Christiaan Huygens (1629-1695) dalam usaha beliau untuk membina planetarium mekanikal. Kertas kerja beliau menyentuh tentang kaedah menggunakan konvergen suatu pecahan berlanjar untuk mencari penghampiran nisbah terbaik bagi nisbah gear. Penghampiran tersebut membolehkan beliau memilih gear dengan bilangan gigi yang betul untuk membina planetarium mekanikal (Rockett & Szüsz, 1992).

Di samping itu, Leonard Euler (1707-1783) telah mengungkapkan e dalam bentuk pecahan berlanjar dan menggunakan ungkapan tersebut untuk menunjukkan bahawa e dan e^x ialah nombor bukan nisbah. Euler juga mengemukakan kaedah pembentuk siri dalam bentuk pecahan berlanjar untuk suatu siri dan sebaliknya (Olds, 1963).

Johan Heinrich Lambert (1728-1777) telah mengitlakkan hasil kerja Euler terhadap e untuk menunjukkan bahawa e^x dan $\tan x$ ialah nombor bukan nisbah sekiranya x ialah nombor nisbah. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) pula menggunakan pecahan berlanjar untuk mencari nilai bagi punca nombor bukan nisbah (Olds, 1963).

Pecahan berlanjar menjadi popular di kalangan ahli Matematik apabila Claude Brezinski menghasilkan buku yang berjudul "*History of Continued Fractions and Padre Approximations*". Justeru itu, bidang pecahan berlanjar membangun secara mendadak dan akhirnya mencapai zaman kegemilangannya pada kurun ke 19. Teori pecahan berlanjar yang penting diperkenalkan dan sifat–sifat konvergen diberikan perhatian yang penuh (Tuyl, 1998).

Pada awal kurun ke 20, pecahan berlanjar mula diterapkan dalam bidang yang lain termasuklah bidang komputer. Sebagai contoh, pecahan berlanjar digunakan dalam algoritma komputer untuk mendapatkan nisbah terhampir bagi nombor nyata (Olds, 1963). Sehingga kini, pecahan berlanjar masih dijadikan bahan kajian ahli-ahli Matematik kerana bidang pecahan berlanjar masih mempunyai pelbagai ruang yang boleh dibangunkan.

1.1.2 Sifat-sifat Pecahan Berlanjar

Suatu ungkapan dalam bentuk

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots \ddots}}}$$

dikenali sebagai pecahan berlanjar. Pembolehubah-pembolehubah a_1, a_2, a_3, $\cdots$ dikenali sebagai hasil bahagi separa. Andaian yang boleh dibuat adalah pembolehubah-pembolehubah a_1, a_2, a_3, $\cdots$ ialah nombor integer, nombor nyata, nombor kompleks ataupun fungsi pembolehubah. Pembolehubah-pembolehubah a_2, a_3, a_4, $\cdots$ adalah sentiasa positif manakala a_1 ialah sebarang kuantiti nyata (Olds, 1963).

Jika bilangan pembolehubah tersebut adalah terhingga, maka pecahan berlanjar yang terhasil dikenali sebagai pecahan berlanjar terhingga. Pecahan berlanjar terhingga boleh diungkapkan dalam bentuk

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Jika bilangan pembolehubah tersebut adalah tak terhingga, maka pecahan berlanjar yang terhasil dikenali sebagai pecahan berlanjar tak terhingga. Pecahan berlanjar tak terhingga pula diungkapkan dalam bentuk

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}} \ddots$$

(Olds, 1963).

Pecahan berlanjar juga boleh ditulis dalam bentuk yang lebih mudah iaitu $[a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots]$ bagi pecahan berlanjar tak terhingga dan $[a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n]$ bagi pecahan berlanjar terhingga. Oleh itu, bilangan hasil bahagi separa bagi suatu pecahan berlanjar terhingga adalah sama dengan bilangan nombor yang muncul dalam tatatanda kurung tersebut (Khintchine, 1963).

$s_k = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k]$ dengan $1 \le k \le n$ ialah suatu bahagian pecahan berlanjar terhingga. s_k juga boleh dianggap sebagai suatu bahagian pecahan berlanjar tak terhingga dengan $k \ge 1$. Justeru, sebarang bahagian pecahan berlanjar sama ada pecahan berlanjar terhingga ataupun pecahan berlanjar tak terhingga dapat ditulis sebagai suatu pecahan berlanjar terhingga (Khintchine, 1963).

Andaian awal yang dapat dibuat adalah setiap nombor nisbah mempunyai pecahan berlanjar terhingga manakala setiap nombor bukan nisbah mempunyai pecahan berlanjar tak terhingga.

$$m = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\vdots} + \cfrac{1}{a_k}}} \qquad m \in \mathbb{Q}$$

dan

$$m = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}} \qquad m \notin \mathbb{Q}.$$

1.1.3 Nombor Nisbah

Nombor nisbah ialah suatu pecahan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan syarat p dan q ialah integer dan $q \neq 0$. Setiap nombor nisbah boleh diungkapkan sebagai suatu pecahan berlanjar mudah yang terhingga dan sebaliknya (Olds, 1963). Berdasarkan kepada kajian Olds (1963), andaian awal yang dibuat sebelum ini iaitu setiap nombor nisbah mempunyai pecahan berlanjar terhingga telah pun dipatuhi. Sebagai contoh, pecahan berlanjar bagi $\frac{68}{29}$ ialah

$$\frac{68}{29} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9}}} \quad \text{atau} \quad \frac{68}{29} = [2,2,1,9].$$

Proses membentuk pecahan berlanjar bagi $\frac{68}{29}$ boleh disusun seperti berikut

$$\frac{68}{29} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{10}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{10}{9}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9}}}.$$

1.1.4 Nombor Bukan Nisbah

Nombor bukan nisbah ialah sebarang nombor yang tidak dapat diwakilkan sebagai nisbah antara dua nombor integer. Sebagai contoh, $e = 2.71828\ldots$ dan $\pi = 3.14159\ldots$ (Ho *et al.*, 2004). Salah satu nombor bukan nisbah iaitu $\sqrt{2}$ ialah suatu penyelesaian bagi persamaan algebra $x^2 - 2 = 0$ dan $\sqrt{2}$ dikenali sebagai nombor algebra. Nombor algebra ialah sebarang nombor x yang memenuhi persamaan algebra, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ dengan syarat $a_0, a_1, \ldots$ ialah nombor integer dan bukan semua nombor integer tersebut bernilai sifar (Olds, 1963).

Nombor bukan nisbah juga dapat diungkapkan dalam bentuk pecahan berlanjar. Pecahan berlanjar yang terlibat ialah pecahan berlanjar tak terhingga (Khintchine, 1963). Berdasarkan kepada kajian Khintchine (1963), andaian awal yang dibuat sebelum ini iaitu setiap nombor bukan nisbah mempunyai pecahan berlanjar tak terhingga telah pun dipatuhi.

1.1.5 Nombor Bukan Nisbah Kuadratik

Nombor bukan nisbah kuadratik ialah sebarang nombor dalam bentuk

$$\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$$

dengan P, D dan Q ialah nombor-nombor integer serta $Q \neq 0$. D ialah nombor integer positif yang bukan kuasa dua sempurna. Nombor yang mempunyai bentuk tersebut digelar nombor bukan nisbah kuadratik kerana nombor berkenaan adalah punca bagi persamaan kuadratik $Q^2x^2 - 2PQx + (P^2 - D) = 0$ (Olds, 1963).

1.2 Objektif Kajian

Objektif kajian ilmiah ini ialah

i. menghasilkan pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik

ii. deduksikan semua pecahan berlanjar bagi nombor-nombor bukan nisbah kuadratik yang telah dihasilkan dalam objektif pertama untuk mendapatkan corak umumnya.

1.3 Skop Kajian

Memandangkan kajian ilmiah ini memfokus kepada pecahan berlanjar bagi nombor bukan nisbah kuadratik, maka kajian ini terhad kepada nombor-nombor bukan nisbah kuadratik sahaja. Nombor-nombor bukan nisbah kuadratik yang dikaji dalam kajian ilmiah ini adalah nombor-nombor yang mempunyai penyebut bernilai satu.

BAB 2

ULASAN LITERATUR

2.1 Pengenalan

Bidang pecahan berlanjar terus berkembang setelah pecahan berlanjar diperkenalkan sejak berabad dahulu lagi. Pelbagai kajian yang melibatkan pecahan berlanjar telah dijalankan sehingga kini. Kebanyakan kajian tentang pecahan berlanjar yang telah dijalankan adalah berasaskan pengembangan pecahan berlanjar bagi nombor nyata. Hal ini kerana pengembangan pecahan berlanjar bagi nombor nyata ialah suatu asasi dan pengembangan tersebut mendedahkan perkaitannya dengan Algoritma Euclid (Thakur, 1996).

2.2 Kajian-kajian Tentang Pecahan Berlanjar

Borwein *et al.* (2005) menyatakan bahawa hujung bagi siri Taylor untuk pelbagai jenis fungsi piawai seperti lengkok tangen dan logaritma boleh diungkapkan sebagai pecahan berlanjar dalam pelbagai bentuk. Hasil yang menakjubkan ialah sesetengah pecahan berlanjar tersebut menghasilkan pecutan dramatik bagi penumpuan siri kuasa berkenaan.

Dalam kajian Mc Laughlin dan Wyshinski (2005) tentang teorem penumpuan bagi pecahan berlanjar dalam bentuk $\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}} \left[\frac{a_n}{1}\right]$, kajian tersebut menyentuh tentang teorem Sleszynski-Pringsheim yang menyatakan bahawa pecahan berlanjar $K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ menumpu kepada suatu nilai terhingga jika

$$|b_n| \geq |a_n| + 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Jika f_n mewakili konvergen ke n, maka

$$|f_n| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Selain itu, Euler menganalisis persamaan Ricatti untuk membuktikan bahawa nombor e mempunyai pengembangan pecahan berlanjar seperti berikut

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}}.$$

RUJUKAN

Borwein, J. M., Choi, K. S. & Pigulla, W. 2005. Continued fractions of tails of hypergeometric series. *The American Mathematical Monthly* **112**, ms. 493-501.

Brown, T. C. & Peter, J. S. 1995. Sums of fractional parts of integer multiples of an irrational. *Journal of Number Theory* **50**, ms. 181-192.

Cohn, H. 2006. A short proof of the simple continued fraction expansion of *e*. *The American Mathematical Monthly* **113**, ms. 57-62.

Ho, C. M., Amran Ahmed & Rozaini Roslan. 2004. *Lecture Notes on Real Analysis*. Universiti Malaysia Sabah, Kota Kinabalu.

Khintchine, A. Y. 1963. *Continued Fractions*. P. Noordhoff Ltd., The Netherlands.

Mc Laughlin, J. & Wyshinski, N. J. 2005. A convergence theorem for continued fractions of the form $\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}} \left[\frac{a_n}{1}\right]$. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **179**, ms. 255-262.

Olds, C. D. 1963. *Continued Fractions*. Random House, New York.

Osler, T. J. 2006. A proof of the continued fraction expansion of $e^{\frac{1}{M}}$. *The American Mathematical Monthly* **113**, ms. 62-65.

Rockett, A. M. & Szüsz, P. 1992. *Continued Fractions*. World Scientific, New York.

Thakur, D. S. 1996. Exponential and continued fractions. *Journal of Number Theory* **59**, ms. 248-261.

Thakur, D. S. 1997. Patterns of continued fractions for the analogues of *e* and related numbers in the function field case. *Journal of Number Theory* **66**, ms. 129-147.

Tuyl, A. V. 1998. *History*. http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/history.html.