KAEDAH KECERUNAN KONJUGAT BERPRASYARAT BAGI MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KABUR PENUH

ALFRED BIN JOUMIL

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2008

PUMS99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: KAEDAH KECERUNAN KONJUGAT BERPRASYARAT BAGI MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KABUR PENUH

IJAZAH: SARJANA MUDA DENGAN KEPUJIAN

SAYA ALFRED BIN JOUMIL SESI PENGAJIAN: 07/08
(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPSM/Sarjana/Doktor Falsafah) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institutsi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

☐ SULIT (Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau Kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)

☐ TERHAD (Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)

☐ TIDAK TERHAD

Disahkan Oleh

(TANDATANGAN PENULIS) (TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: PETI SURAT 304, KAMPUNG PANTAI, 89657 TAMBUNAN, SABAH.

PROF. ~~DR~~ MADYA DR. JUMAT SULAIMAN
Nama Penyelia

Tarikh: 30/04/08 Tarikh: 30/04/08

CATATAN:- *Potong yang tidak berkenaan.
**Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa /organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.
@Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

30 April 2008

ALFRED BIN JOUMIL
HS2004-2965

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**
(Prof. Madya. Dr. Jumat Sulaiman)

2. **PEMEKRISA 1**
(Puan Suzelawati Zenian)

3. **PEMERIKSA 2**
(Cik Khadizah Ghazali)

4. **DEKAN**
(Supt/KS. Prof. Madya. Dr. Shariff A. K. Omang)

ABSTRAK

Terdapat pelbagai ketidakpastian dalam menukarkan ukuran dalam setiap masalah harian yang timbul kepada bentuk ukuran berunsurkan nombor. Jadi, sistem persamaan linear kabur penuh ini diperkenalkan untuk mengatasi masalah ini. Demi menyelesaikan sistem persamaan kabur penuh ini dengan lebih mudah dan cepat, kaedah berangka digunakan. Dalam disertasi ini, Kaedah Kecerunan Konjugat Berprasyarat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kabur penuh yang berbentuk $m \times n$ saiz matriks dan dibandingkan dengan kaedah Gauss-Seidel serta Kaedah Kecerunan Konjugat Piawai. Penyelesaian optimum dapat diperolehi dengan penggantian nilai yang sesuai untuk parameter-parameter yang terlibat. Aspek yang akan dikaji dalam perbandingan antara ketiga-tiga kaedah ini ialah jumlah lelaran dan juga ralat maksimum. Berdasarkan keputusan, dapat disimpulkan bahawa kaedah KKB boleh menumpu dengan lebih cepat dengan bilangan lelaran dan ralat maksimum yang lebih kecil berbanding dengan kaedah GS dan KKP.

PENGHARGAAN

Saya ingin mengambil kesempatan keemasan ini untuk mengucapkan jutaan terima kasih kepada penyelia saya iaitu, Prof. Madya Dr Jumat Sulaiman kerana kesudiannya untuk membantu dan memberi tunjuk ajar dalam proses penyiapan penulisan disertasi ini. Beliau telah banyak membantu saya dalam mengkongsikan pengetahuan dan idea yang mana dapat membimbing saya untuk mengenalpasti dan menyelesaikan masalah yang timbul.

Saya juga ingin mengambil kesempatan ini untuk menunjukkan penghargaan saya kepada semua pensyarah Matematik yang telah memberikan tunjuk ajar kepada saya secara langsung mahupun tidak langsung selama pengajian saya. Sesungguhnya, ilmu pengetahuan dan tunjuk ajar yang diberikan telah banyak membantu saya bagi menempuhi segala cabaran dalam bidang Matematik sehingga ke peringkat yang lebih tinggi.

Akhir sekali, ucapan terima kasih juga kepada semua ahli keluarga saya kerana banyak membantu dari segi kewangan dan dorongan kepada diri saya. Tidak lupa juga kepada rakan-rakan seperjuangan saya yang mana banyak memberikan sokongan kepada saya dari segi nasihat dan dorongan bagi memberikan keyakinan kepada saya dalam menyiapkan penulisan disertasi ini. Saya sungguh-sungguh berterima kasih yang tidak terhingga kepada semua yang telah membantu saya. Tuhan memberkati kalian.

PRECONDITIONED CONJUGATE GRADIENT METHOD FOR SOLVING FULLY FUZZY LINEAR SYSTEM

ABSTRACT

There are uncertainties in transforming real life measurements into numbers. Therefore, fully fuzzy systems of linear equations are getting more and more common, to tackle these uncertainties. These linear systems can be solved easily using numerical methods. In this dissertation, the Precondition Conjugate Gradient method is being used to solve $m \times n$ matrices and being compared to the classical Gauss-Seidel method and the standard Conjugate Gradient method. By substituting appropriate values for all the parameters involved, the optimal solutions were obtained for proposed methods. The aspects to be studied in comparing all three methods are number of iterations and maximum error. Based on the results, it was concluded that KKB method converges faster with lesser number of iterations and maximum error than the GS and KKP method.

KANDUNGAN

SENARAI ISTILAH

SPL	Sistem Persamaan Linear
SPLK	Sistem Persamaan Linear Kabur
SPLKP	Sistem Persamaan Linear Kabur Penuh
GS	Gauss-Seidel
KKP	Kecerunan Konjugat Piawai
KKB	Kecerunan Konjugat Berprasyarat
PBB	Pengeduran Berlebihan Berturut-turut
WYL	Wei-Yao-Liu
AMG	Multigrid Algebra

SENARAI JADUAL

No. Jadual | Muka surat

SENARAI RAJAH

SENARAI SIMBOL

$=$	sama dengan
$+$	tambah
-	tolak
x	darab
$\neq$	tidak sama dengan
$>$	lebih besar daripada
$<$	lebih kecil daripada
$\leq$	lebih kecil atau sama
$\geq$	lebih besar atau sama
ε	ralat toleransi
$\tilde{x}$	kabur
α	alpha
β	beta
$\otimes$	pendaraban
$\oplus$	penambahan
Σ	jumlah
A	pekali matrik
$x^{(n)}$	bilangan lelaran ke- n
$\forall$	untuk semua
$\in$	elemen/unsur kepada
i	baris pangsi ke- i
j	lajur pangsi ke- j
I	Identiti
L	bawah
U	atas
ω	omega
LR	Kiri dan Kanan
Γ	Gamma (huruf besar)
γ	Gamma (huruf kecil)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Kecerdasan Buatan

Menurut Badiru dan Cheung (2002), kecerdasan semula jadi melibatkan keupayaan manusia untuk memperolehi ilmu pengetahuan, membuat keputusan dengan pengetahuan dan menggunakannya untuk menyelesaikan masalah-masalah dengan berkesan. Berbeza dengan kecerdasan buatan yang ditakrifkan sebagai kebolehan sebuah mesin menggunakan pengetahuan yang disimulasikan dalam masalah-masalah penyelesaian. Maka, kecerdasan buatan ini digunakan untuk menyediakan peralatan untuk taakulan dan juga untuk memahami kompleks atau fenomena tidak lengkap (Schneider *et al.*,1996).

Kecerdasan buatan ini mula diperkenalkan dalam tahun 1956 oleh John McCarthy sewaktu dalam persidangan di Dartmouth. Selain menumpukan perhatian ke atas perkakasan untuk meniru kecerdasan, persidangan ini juga mengetengahkan kursus untuk pemeriksaan struktur data yang diproses oleh komputer, penggunaan komputer untuk memproses simbol, keperluan untuk bahasa baru dan peranan komputer untuk teori ujian. Kecerdasan buatan boleh dijelaskan juga sebagai satu cabang dalam sains komputer iaitu berkaitan dengan automasi kecerdikan tingkah laku. Ia juga adalah satu bidang kajian yang merangkumi teknik berkomputer untuk mempersembahkan tugasan yang memerlukan kecerdasan manusia. Selain itu, kecerdasan buatan juga merupakan satu teknologi memproses maklumat mengenai proses penaakulan, pembelajaran dan penanggapan. Antara cabang-cabang kecerdasan buatan adalah (Badiru & Cheung, 2002):

i) *Pemprosesan bahasa tabii* berurusan dengan bahagian penyelidikan pelbagai bidang contohnya siasatan pangkalan data sistem-sistem, pemahaman cerita, pengindeksan teks automatik, tatabahasa dan gaya analisis teks, penjanaan teks automatik, mesin penterjemah, analisis pertuturan dan ucapan sintesis.

ii) *Komputer wawasan* mengenai usaha penyelidikan yang melibatkan penganalisisan pemandangan, persefahaman imej dan terbitan usul.

iii) *Robotik* melibatkan kawalan kesan-kesan ke atas robot untuk memanipulasi atau benda-benda genggaman, gerak alih mesin-mesin mandiri dan penggunaan input deria untuk membimbing tindakan-tindakan yang diambil.

iv) *Penyelesaian masalah dan perancangan* melibatkan aplikasi-aplikasi seperti kehalusan matlamat peringkat tinggi ke dalam satuan peringkat rendah, keazaman tindakan diperlukan untuk mencapai matlamat, semakan rancangan berdasarkan ke atas keputusan sederhana dan pencarian tertumpu kepada matlamat penting.

v) *Pembelajaran* mengenai dengan penyelidikan ke dalam pelbagai bentuk pembelajaran termasuk pembelajaran hafalan, belajar nasihat terus, belajar menerusi teladan dan belajar menerusi prestasi tugas.

vi) *Sistem pakar* adalah mengenai pemprosesan ilmu bagi memberi tindak balas dalam pemprosesan data. Ia melibatkan pembangunan perisian komputer untuk menyelesaikan masalah keputusan yang kompleks.

Bagi sistem praktikal, terdapat dua maklumat penting yang datang daripada dua sumber iaitu:

i) Kepakaran manusia untuk menghuraikan mengenai sistem itu tentang pengetahuan mereka dalam bahasa semula jadi.

ii) Pengukuran deria dan permodelan matematik yang dihasilkan menurut hukum-hukum fizik.

Paling penting sekali adalah menggabungkan kedua-dua jenis maklumat ini ke dalam reka bentuk sistem dan sistem kabur yang akan dihasilkan kemudian digunakan untuk melaksanakan perubahan daripada pangkalan pengetahuan seorang manusia ke dalam satu rumus matematik untuk membangunkan sistem pakar.

1.2 Sistem Kabur

Tomsovic (2006) menyatakan bahawa terdapat banyak teknik yang biasa digunakan bagi mengendalikan ketidakpastian dalam kepakaran sistem dalam kecerdasan buatan. Perunding sistem pakar bagi masalah praktikal sering memerlukan beberapa andaian mudah untuk dibuat. Satu pendekatan untuk mengurus ketidakpastian adalah konsep set kabur.

Set-set kabur telah diperkenalkan oleh Lofti A Zadeh dalam 1965 dan objektifnya adalah mengitlakkan anggapan satu peringkat dan pendapat-pendapat untuk menampung jenis kekaburan atau kekaburan dalam masalah keputusan yang banyak. Lazimnya, logik kabur dibangunkan dalam bentuk kekaburan dan/atau konflik, yang tidak diwakili memang di dalam rangka kerja kebarangkalian. Dalam bentuk logik kebenaran, setiap usul itu dikehendaki menjadi sama ada benar (1) atau palsu (0). "0" dan "1" sesuai untuk proses komputer konvensional secara sempurna tetapi jika boleh mengenakan sekatan serius pada taakulan mesin untuk menyalin aspek-aspek tidak tepat dalam taakulan manusia. Penyataan yang mengandungi ketidakpastian adalah sama dengan tidak tepat dan memerlukan penjelasan. Set-set kabur menekankan peragaan ketidakpastian yang serupa (Tomsovic, 2006).

Manakala algoritma yang terdapat di dalam komputer yang banyak dibangunkan untuk memproses data berangka, sistem kabur menyediakan satu cara alternatif untuk memanipulasi maklumat, data yang bukan sahaja dalam kecerdasan buatan. Sistem kabur adalah satu daripada cabang kecerdasan buatan. Sistem kabur boleh didapati dalam sistem pakar dan ianya berasaskan pengetahuan atau peraturan berpangkalan sistem yang dibina daripada satu koleksi jika JIKA-MAKA yang menyediakan satu pendekatan alternatif untuk mewakili masalah-masalah dan pemprosesan maklumat (Badiru & Cheung, 2002)

Selain dalam kecerdasan buatan, sistem kabur memainkan peranan yang penting dalam pelbagai bahagian seperti ekonomi dan kewangan seperti, fizik, statistik dan kejuruteraan. Dalam banyak penggunaan, sekurang-kurangnya beberapa parameter sistem itu diwakili oleh kuantiti kabur berbanding nombor nyata. Sebahagian daripada keupayaan dan ciri-ciri yang berguna disediakan dalam pendekatan-pendekatan kumpulan kabur adalah (Tomsovic, 2006):

i) Mewakili kaedah untuk kenyataan bahasa tabii,
ii) Ketidakpastian model-model dengan statistiknya adalah tidak ada atau tidak tepat,
iii) Maklumat model-model kenyataan subjektif,
iv) Penilaian kualiti kenyataan dalam fikiran,
v) Integrasi antara kaedah-kaedah logik dan kaedah berangka,
vi) Model bagi kekangan lembut,
vii) Model bagi penyelesaian berganda untuk objektif yang bercanggah,
viii) Asas matematik yang kukuh untuk manipulasi perwakilan matematik.

1.3 Kaedah Berangka

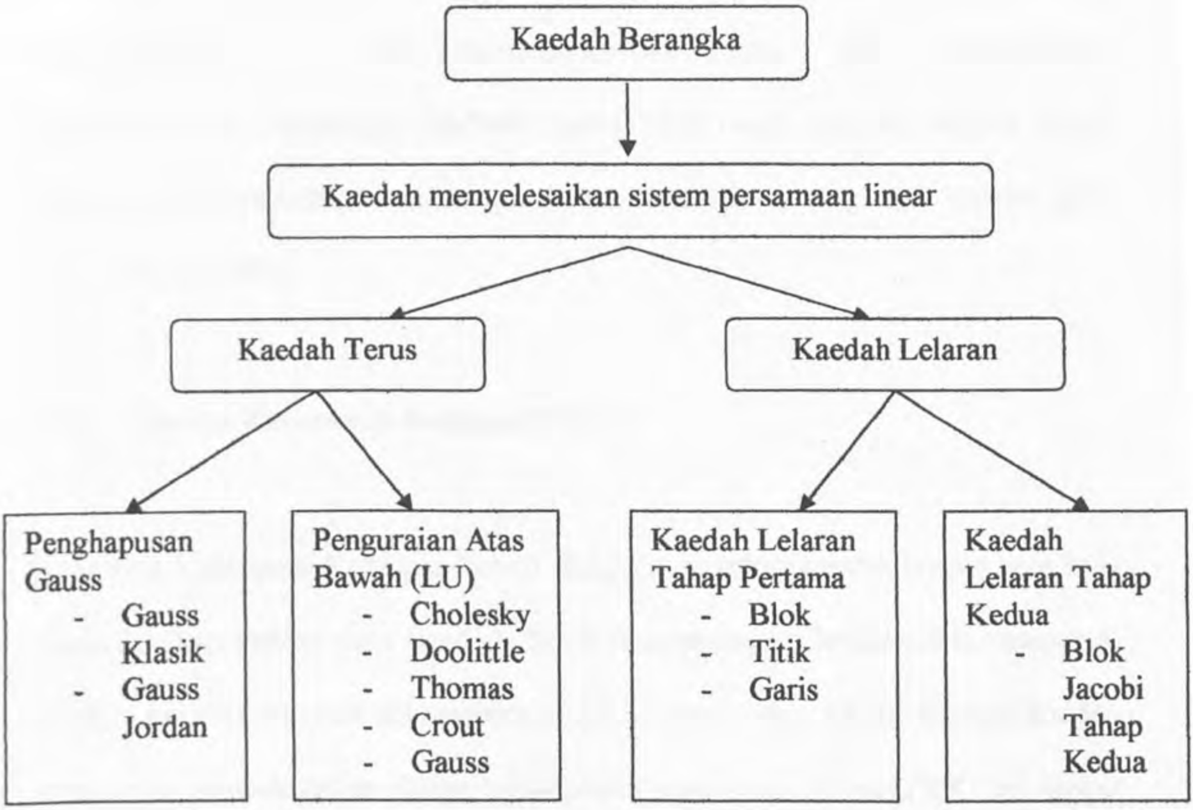
Terdapat banyak masalah dalam matematik gunaan yang melibatkan penyelesaian sistem persamaan linear (SPL) dengan sistem linear yang terjadi secara semulajadi dalam sesetengah kes dan merupakan salah satu bahagian dari penyelesaian kes dalam kes yang lain. Kaedah berangka merupakan bidang matematik dan sains komputer yang mencipta, menganalisis dan mempersembahkan algoritma bagi penyelesaian berangka masalah-masalah matematik yang selanjar.

Terdapat dua jenis penyelesaian untuk menyelesaikan SPL

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \tag{1.1}$$

iaitu kaedah terus dan kaedah lelaran. Kaedah terus lebih kepada teori penyelesaian tepat $\tilde{x}$ dalam beberapa langkah yang terhingga. Kaedah lelaran adalah kaedah hampiran yang mencipta satu urutan bagi mencapai tahap kejituan pengiraan tertentu. Kaedah khusus juga telah dibangunkan untuk sistem linear yang mana mempunyai lebih banyak sifat sebagai contoh simetri dan pepenjuru.

Menurut Fausett (2003), banyak teknik maju yang boleh didapati untuk menambah simpanan pada masa dan/atau ruang apabila penyelesaian persamaan-persamaan aljabar yang linear seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1.1. Selain set persamaan $n \times n$, terdapat set persamaan $m \times n$, dengan nilai m tidak diketahui dan nilai n tidak sama dengan m, iaitu $m < n$ maka ini boleh dipanggil matriks bawah tentu. Bagi matriks bawah tentu, sama ada boleh atau tiada penyelesaian atau lebih daripada satu. Bagi kes matriks tentu secara umumnya tiada penyelesaian tepat. Bagaimanapun ia mungkin membangunkan satu penyelesaian bagi menentukan jawapan yang "paling dekat" untuk memenuhi semua persamaan serentak.



Rajah 1.1 Klasifikasi kaedah sering digunakan dalam SPL.

1.3.1 Kaedah Gauss-Seidel

Pada asasnya kaedah Gauss-Seidel (GS) merupakan satu skema yang menumpu dengan pantas jika keputusan yang baru digunakan secepat mungkin sebaik sahaja diperolehi atau diketahui untuk mendapatkan penyelesaian tepat bagi nilai $\tilde{x}$. Persamaan dalam skema ini pada lelaran ke- $(m+1)$ adalah diberikan seperti berikut:

$$x_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(m)}\right),\ i = 1,2,3,\ldots,N. \tag{1.2}$$

Dengan membandingkan kaedah GS dengan kaedah Jacobi, ia boleh ditunjukkan dari segi teori bahawa apabila kedua-dua kaedah bertumpu. Walau bagaimanapun kaedah GS boleh menumpu dua kali ganda lebih cepat daripada kaedah Jacobi untuk masalah-masalah biasa dengan struktur matriks jarang dan matriks jalur (McDonough, 2001).

1.3.2 Kaedah Kecerunan Konjugat Piawai

Algoritma Kecerunan Konjugat Piawai (KKP) merupakan kaedah lelaran asas bagi menyelesaikan sistem yang berskala besar dengan sedikit lebihan saiz simpanan. Kaedah ini asalnya telah dibangunkan oleh Hestenes dan Stiefel sebagai kaedah terus untuk menyelesaikan sistem linear positif tentu $n \times n$. Kaedah KKP ini sangat berguna apabila digunakan sebagai kaedah lelaran (Faires & Burden, 2003). Kaedah KKP ini juga sangat efektif bagi sistem yang berbentuk

$$A\widetilde{x} = \widetilde{b} \tag{1.3}$$

dengan A, $\widetilde{x}$ dan $\widetilde{b}$ masing-masing adalah matriks pekali diketahui, vektor tidak diketahui dan vektor diketahui (Shewchuk, 1994).

1.3.3 Kaedah Kecerunan Konjugat Berprasyarat

Sejak kaedah KKP diperkenalkan oleh Fletcher-Reeves dalam tahun 1960, ia menjadi algoritma yang paling penting bagi pengoptimuman berskala besar, kerana hanya sedikit saiz simpanan yang diperlukan bagi vektor dan boleh menumpu dengan lebih cepat. Kadar menumpu bagi kaedah KKP ini bergantung dengan nilai ganjil bagi data matriks A. Untuk menjadikan kaedah KKP ini lebih cekap, sistem berprasyarat diperlukan. Idea di sebalik kaedah Kecerunan Konjugat Berprasyarat (KKB) ini adalah untuk diaplikasikan dalam kaedah KKP kepada sistem yang telah ditukarkan kepada

$$\widetilde{A}^T \widetilde{A} x = \widetilde{A}^T b \tag{1.4}$$

dengan

$$\widetilde{A} = C^{-1} A C^{-1}, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{x} = C\widetilde{x}, \tag{1.6}$$

$$\widetilde{b} = C^{-1}\widetilde{b}. \tag{1.7}$$

Prasyarat diwakilkan sebagai M iaitu

$$M = C^T C. \tag{1.8}$$

C merupakan matriks simetri positif tentu yang mana memilih $\widetilde{A}$ berkeadaan baik atau matriks dengan kelompok nilai eigen (Yang *et al.*, 2001).

1.4 Objektif kajian

Kajian disertasi ini adalah bertujuan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kabur penuh (SPLKP). Kajian ini lebih tertumpu dalam menyelesaikan sistem kabur yang bersaiz $m \times n$ yang mana merupakan matriks segi empat sama dan juga segi empat tepat. Kaedah yang digunakan dalam kajian ini adalah kaedah GS, KKP dan KKB. Kaedah GS merupakan kaedah kawalan. Antara objektif dalam kajian ini adalah seperti:

i). Mendapatkan dan mencari penyelesaian hampiran untuk sistem persamaan linear kabur penuh yang bersaiz $m \times n$.

ii) Membangunkan kaedah KKB untuk penyelesaian SPLKP.

iii) Mengesahkan penyelesaian berangka kaedah KKB adalah lebih cepat daripada kaedah KKP dari segi nombor lelaran dan ralat maksimum.

1.5 Skop kajian

Kajian ini akan menyelesaikan SPLKP dengan matriks pekali, $m \times n$ merupakan segi empat sama iaitu $m = n$ dan juga segi empat tepat iaitu $m \neq n$. Bagaimanapun, bagi kes $m \neq n$ iaitu $m > n$, matriks lebih tentu yang tidak boleh diselesaikan tidak dibincangkan dalam penyelidikan ini. Dalam kajian ini, SPLKP tidak diperolehi daripada masalah dunia sebenar. Hanya kaedah lelaran yang digunakan seperti kaedah KKB, KKP dan GS yang akan dipertimbangkan. Dalam pelaksanaan lelaran ke atas ketiga-tiga kaedah berkenaan, ralat toleransi, $\varepsilon = 10^{-1}$ digunakan dalam ujian penumpuan lelaran.

BAB 2

ULASAN LITERATUR

2.1 Sistem Persamaan Linear Kabur Penuh

Menurut Rao and Chen (1998), sistem ini sangat berguna dalam bidang biologi dan fizik untuk proses analisis dan juga dalam masalah kejuruteraan sebenar, di mana wujudnya aspek-aspek yang tidak pasti. Konsep yang paling penting dalam sistem ini adalah sebutan matriks kabur itu sendiri yang banyak membawa maksud dalam literatur. Untuk mendefinisikan matriks kabur, definisi yang dibuat oleh Dubois dan Prade dalam matriks yang mengandungi nombor kabur sebagai unsurnya digunakan (Dehghan *et al.*, 2006).

Maka suatu matriks yang diwakili oleh $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ dikatakan matriks kabur sekiranya setiap unsur $\widetilde{A}$ adalah nombor kabur. $\widetilde{A}$ juga akan dipanggil positif atau negatif ($\widetilde{A} > 0$ atau $\widetilde{A} < 0$) jika setiap unsur kepada matriks $\widetilde{A}$ adalah positif atau negatif. Ini bersamaan dengan matriks kabur bukan-negatif dan juga bukan-positif. Katakan setiap unsur kiri dan kanan (LR) matriks $\widetilde{A}$ adalah nombor kabur. Ia juga boleh diwakilkan sebagai $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ yang mana $\widetilde{a}_{ij} = (a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})_{LR}$, dengan perwakilan yang baru $\widetilde{A} = (A, M, N)$, dengan A, M dan N adalah matriks "Crisp"

RUJUKAN

Abbasbandy, S. & Jafarian, A. 2006. Steepest descent methods for solving fuzzy system of linear equations. *Applied Mathematics and Computation* **175**, 823-833.

Allahviranloo, T. 2004. Numerical methods for fuzzy system of linear equations. *Applied Mathematics and Computation* **155**, 493-502.

Allahvinranloo, T. & Kermani, A. M. 2006. Solution of a fuzzy system of linear equations. *Applied Mathematics and Computations* **175**, 519-531.

Andrei, N. 2007. A scaled BFGS preconditioned conjugate gradient algorithm for unconstrained optimization. *Applied Mathematics and Computations* **20**, 645-650.

Asady, B., Abbasbandy, S. & Alavi, M. 2005. Fuzzy general linear systems. *Applied Mathematics and Computation* **169**, 34-40.

Badiru, A. & Cheung, J. Y. 2002. *Fuzzy Engineering Expert systems with Neural Network Application*. John Wiley & Sons, New York.

Bai, Z.Z., & Qiwang, Z. 2006. Restrictive preconditioners for conjugate gradient methods for symmetric positive definite linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **187**, 202–226.

Benhamadou, M. 2007. Preconditioners for the resolution of the linear systems Ax = b. *Applied Mathematics and Computation* **189**, 927–942.

Chapra, S. C. & Canale, R.P. 2006. *Mathematical Methods for Engineers*. 3rd Ed. McGraw – Hill, Singapore.

Gerald, C. F. & Wheatly, P. O. 1999. *Applied Numerical Analysis.* 6th Ed. Addison Wesley Longman, United States of America.

Jiang, S., Yang, L., Alsoliby, S., & Zhou, G. 2007. PCG solver and its computational complexity for implicit control-volume finite-element method of RTM mold filling simulation. *Composites Science and Technology.* http://www.sciencedirect.com

Li, S.S., Chen, R.S., Sun, X.F., & Ye, X.D, 2006. Block adaptive shifting algorithm for filtering based on the Toeplitz preconditioned conjugate gradient technique. *Computers and Electrical Engineering* **32**, 468–473.

McDonough, J. M. 2001. Lecture in Basic Computational Numerical Anaylsis. http://www.engr.uky.edu/~acfd/egr537-lctrs.pdf

Rao, S. S., & Chen, L. 1998. Numerical solution of fuzzy linear equations in engineering anaylsis, International Journal for Numerical Methods in Engineering 42, 829-846.

Schneider, M., Kandel, A., Langholz, G. & Chew, G. 1996. *Fuzzy Expert System Tools.* John Wiley & Sons, New York.

Shah, A.A. 2008. Using Generalized Iterative Techniques for Solution of Sparse Nonsymmetric Systems. *Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Sciences.* Al-Ain, United Arab Emirates (UAE): March 03-06. In CD Form.

Shengwei, Y., Wei, Z., & Huang, H. 2007. A note about WYL's conjugate gradient method and its applications. *Applied Mathematics and Computation* **191**, 381–388.

Shewchuk, J. R. 1994. An Introduction to the Conjugate Gradient method the agonizing pain. http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-Conjugate-Gradient.pdf

Tomsovic, K. 2006. *Fuzzy systems application to power system*. http://tomsovic.eecs.wsu.edu/Vitae/Publications/TOMS00a.pdf.

Wang, X., Zhong, Z. & Ha, M. 2001. Iteration algorithms for solving a system of fuzzy linear equations. *Fuzzy Sets and Systems* **119**, 121-128.

Yang, C., Duraisami, R., & Davis, L. 2001. Superresolution Using Precondition Conjugate Gradient Method. *Computer Vision Laboratory*. University of Maryland, College Park,. MD.

Zheng, B. & Wang, K. 2006. General fuzzy linear systems. *Applied Mathematics and Computations* **181**, 1276-1286.