PECAHAN BERTURUTAN BERLANJAR TAK TERHINGGA BAGI NOMBOR TRANSENDEN

SABARINA BT MOHAMAD ALI

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUNI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH
SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN EKONOMI
SEKOLAH SAINS DENGAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2008

PUMS99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: PECAHAN BERTURUTAN BERLANJAR TAK TERHINGGA BAGI NOMBOR TRANSENDEN

IJAZAH: IJAZAH SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN MATEMATIK DENGAN EKONOMI

SAYA SABARINA BT MOHAMAD ALI (HURUF BESAR) SESI PENGAJIAN: 2007 / 2008

mengaku membenarkan tesis (LPSM/Sarjana/Doktor Falsafah) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institutsi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

[ ]	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau Kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)
[ ]	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
[ ]	TIDAK TERHAD	

Disahkan Oleh

Sabarina
(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: No 43, LOT 11666, KG DELEK BARU, 41250, KLANG, SELANGOR

Nama Penyelia: Dr. Aini Janteng
Pensyarah / Penasihat Akademik
Program Matematik Dengan Ekon
Sekolah Sains Dan Teknologi
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

Tarikh: 30 APRIL 2008

Tarikh: 29/04/2008

CATATAN:- *Potong yang tidak berkenaan.
**Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa /organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.
@Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

30 April 2008

Sabarina

SABARINA BT MOHAMAD ALI

HS2004-2692

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**
   (DR. AINI JANTENG) _____

2. **PEMERIKSA 1**
   (PROF. MADYA DR. JUMAT B. SULAIMAN) _____

3. **PEMERIKSA 2**
   (PN SUZELAWATI ZENIAN) _____

4. **DEKAN**
   (SUPT/KS. PROF. MADYA DR. SHARIFF A.K. OMANG) _____

PENGHARGAAN

Assalamualaikum w.b.t dan selamat sejahtera.

Alhamdulillah syukur saya ke hadrat Ilahi dengan limpah dan kurnianya, saya dapat menyiapkan kajian ilmiah ini. Terlebih dahulu saya ingin merakamkan setinggi-tinggi penghargaan dan jutaan terima kasih kepada Dr. Aini Janteng selaku penyelia saya yang telah banyak memberikan bantuan, tunjuk ajar, idea serta nasihat kepada saya bagi menyempurnakan kajian ilmiah ini. Ribuan terima kasih juga diucapkan kepada para pensyarah Matematik dengan Ekonomi dan Matematik dengan Komputer Grafik yang lain yang turut mengemukakan idea dan komen yang membina sepanjang kajian ini dijalankan. Tidak lupa juga kepada ibu bapa dan ahli keluarga saya yang banyak memberi sokongan moral kepada saya bagi menyiapkan kajian ilmiah ini. Ribuan terima kasih juga kepada rakan-rakan seperjuangan yang banyak memberi pendapat dan dorongan yang berterusan. Akhir sekali, terima kasih kepada pihak yang terlibat secara langsung dan tidak langsung dalam menyiapkan kajian ilmiah ini.

Sekian terima kasih. Wassalam.

ABSTRAK

Kajian ini adalah mengenai pecahan berturutan berlanjar. Di dalam teori nombor, terdapat dua jenis pecahan berturutan berlanjar iaitu pecahan berturutan berlanjar terhingga dan pecahan berturutan berlanjar tak terhingga. Nombor nisbah adalah pecahan berturutan berlanjar terhingga manakala nombor tak nisbah adalah pecahan berturutan berlanjar tak terhingga. Kajian ini memberikan tumpuan kepada nombor tak nisbah khususnya nombor transenden. Terdapat enam nombor transenden yang dikaji. Tujuan kajian ini adalah mengkaji pecahan berturutan berlanjar khususnya pecahan berturutan berlanjar tak terhingga. Seterusnya, penumpuan-penumpuan bagi pecahan berturutan berlanjar yang diperoleh ditentukan dan akhir sekali penghampiran-penghampiran bagi nombor transenden diperoleh. Pecahan berturutan berlanjar mempunyai dua kaedah. Pertama, kaedah biasa bagi pecahan berturutan berlanjar tak terhingga. Kaedah ini sesuai untuk ketidaknisbahan algebra. Kedua, kaedah fungsi kurungan. Kaedah ini sesuai untuk ketransendenan. Kajian ini menggunakan kaedah fungsi kurungan. Hasil kajian mendapati bahawa, pecahan berturutan berlanjar tak terhingga mempunyai bentuk pecahan yang menarik. Selain itu, enam nombor transenden yang dikaji adalah dalam bentuk nombor perpuluhan dan dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan menerusi penghampiran-penghampirannya. Penumpuan-penumpuan bagi enam nombor transenden yang dikaji menunjukkan dua bentuk yang berbeza iaitu bentuk menaik secara berekanada dan menurun secara berekanada.

INFINITE CONTINUED FRACTIONS FOR TRANSCENDENTAL NUMBER

ABSTRACT

This research is centralizing continued fractions. In the theory of numbers, there are two types of continued fractions which are finite continued fractions and infinite continued fractions. Rational number can be known as the finite continued fractions, where as for the irrational number is infinite continued fractions. This research focuses on the irrational number, particularly on transcendental number. There are six transcendent numbers that were being studied in this research. This research was aiming study for the continued fractions specific on infinite continued fractions for transcendent number. The convergent for the continued fractions were being determined afterwards, and then need to find the approximation for transcendent number. Two methods were being used in the infinite continued fractions. The first method is ordinary continued fractions method which is common way for algebraic irrational number. The next method is called bracket function method, it is appropriate when using on transcendental number. However, this research is mainly on bracket function method. As for the result on this research, it shows that the infinite continued fractions have an interesting fraction form. Besides that, the six transcendent numbers in this research are in decimal form and it can be shown on fraction form from their approximations. The convergent for six transcendent numbers shows two different kinds of patterns, which are monotonically increasing and monotonically decreasing.

KANDUNGAN

Muka Surat

SENARAI JADUAL

SENARAI SIMBOL

$\aleph$	Set nombor asli
$\overline{Q}$	Set nombor tak nisbah
Z	Set nombor integer
$+$	Penambahan
$-$	Penolakan
$\pm$	Positif dan negatif
$=$	Sama dengan
$\neq$	Tidak sama dengan
$\geq$	Lebih besar atau sama dengan
$\leq$	Lebih kecil atau sama dengan
$>$	Lebih besar daripada
$<$	Lebih kecil daripada
$\in$	Unsur kepada
e	Eksponen
π	Phi
$\lvert\ \rvert$	Nilai mutlak/modulus
∞	Infiniti/tidak terhingga

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Nombor adalah asas dalam pengiraan. Nombor amat penting dalam kehidupan manusia contohnya dalam kewangan dan ekonomi manusia. Manusia menggunakan nombor untuk membilang sesuatu barang atau sebarang pengiraan. Nombor yang sering digunakan adalah nombor-nombor dalam lingkungan nombor asli, $\aleph$, bagi pengiraan biasa, tetapi nombor-nombor seperti nombor kompleks atau nombor tak nisbah jarang digunakan dalam kehidupan manusia.

Kajian ini memberikan tumpuan kepada nombor tak nisbah. Nombor tak nisbah, $\overline{Q}$, dapat ditakrifkan sebagai nombor yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk nisbah iaitu, jika $x \in \overline{Q}$, $x \neq \frac{p}{q}$ di mana $p,q \in Z$, $q \neq 0$. Menurut Nagell (1964) dalam permulaan teori nombor, ciri-ciri khusus nombor tak nisbah adalah sangat penting.

1.2 Jenis-jenis Nombor Tak Nisbah

Menurut Hardy dan Wright (1979), terdapat dua jenis nombor yang telah dikategorikan di kalangan ketidaknisbahan iaitu ketidaknisbahan algebra dan ketransendenan iaitu e, π dan nombor-nombor yang berasal daripada e dan π.

1.2.1 Ketidaknisbahan Algebra

Ketidaknisbahan algebra merupakan punca dari polinomial dengan pekali-pekali integer. Ketidaknisbahan algebra dapat diterangkan seperti berikut:

Teorem 1.1 (Nagell, 1964) Jika $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ adalah polinomial dalam x dengan pekali pengamir $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan ε adalah punca kepada persamaan $f(x) = 0$, maka ε merupakan sama ada integer atau nombor tak nisbah (Nagell, 1964).

Teorem 1.2 (Nagell, 1964) Jika n dan N adalah nombor-nombor asli, dan jika N bukan kuasa ke-n bagi nombor asli, maka

$$\sqrt[n]{N}$$

adalah nombor tak nisbah.

Menurut Nagell (1964), nombor tak nisbah daripada Teorem 1.1 dan Teorem 1.2 dikenali sebagai nombor-nombor algebra. Apabila $f(x)$ adalah polinomial dalam x dengan pekali nisbah, sebarang punca bagi persamaan $f(x) = 0$ digelar nombor

algebra. Contohnya, dalam polinomial ringkas, $x^2 - 2 = 0$, maka $x = \pm\sqrt{2}$ merupakan punca bagi persamaan tersebut. Oleh itu, $x = \pm\sqrt{2}$ adalah nombor-nombor algebra. Contoh nombor ketidaknisbahan algebra yang lain adalah $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ dan $\sqrt{7}$. Sebarang nombor bukan ketidaknisbahan algebra dipanggil transenden (Nagell, 1964).

1.2.2 Ketransendenan

Nombor transenden adalah sebarang nombor tak nisbah yang bukan punca bagi sebarang polinomial dengan pekali-pekali integer. Set bagi nombor transenden adalah tidak terbilang. Terdapat banyak nombor ketransendenan berbanding ketidaknisbahan algebra (Lai & Danca, 2006).

Contoh nombor-nombor transenden adalah e dan π. Nilai bagi e adalah $e = 2.712828...$ menjadi asas kepada sistem logaritma asli. π adalah terhasil daripada ukur lilitan bahagi diameter dengan jejari $\frac{1}{2}$ dan nilai bagi π adalah $\pi = 3.14159...$ (Nagell, 1964).

Seterusnya, dibincangkan tentang pecahan berturutan berlanjar. Pecahan berturutan berlanjar diperlukan dalam kajian ini untuk mendapatkan penghampiran kepada nombor transenden.

1.3 Pecahan Berturutan Berlanjar

Terdapat dua jenis pecahan berturutan berlanjar iaitu, pecahan berturutan berlanjar terhingga dan pecahan berturutan berlanjar tak terhingga. Nombor nisbah adalah pecahan berturutan berlanjar terhingga, manakala nombor tak nisbah adalah pecahan berturutan berlanjar tak terhingga (Mollin 1998). Namun, kajian ini hanya mengkaji tentang nombor tak nisbah dan pecahan berturutan berlanjar tak terhingga sahaja.

Menurut Burton (2007), pecahan berturutan berlanjar tak terhingga ditulis dalam bentuk

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

dengan a_0, a_1, a_2, ... adalah jujukan integer tak terhingga, kesemuanya positif kecuali a_0.

1.4 Objektif Kajian

Objektif kajian ini adalah seperti berikut :

a) Mendapatkan pecahan berturutan berlanjar bagi nombor tak nisbah khususnya nombor transenden;

b) Menentukan penumpuan bagi pecahan berturutan berlanjar yang diperoleh; dan

c) Menunjukkan bahawa konvegen-konvegen adalah penghampiran bagi nombor transenden.

1.5 Skop kajian

Kajian ini secara amnya mengkaji tentang pecahan berturutan berlanjar dan nombor tak nisbah. Secara khususnya, kajian ini lebih menumpu kepada pecahan berturutan berlanjar tak terhingga dan nombor transenden. Nombor transenden yang dikaji hanya dikhususkan kepada enam nombor iaitu $e, \pi, \log 2, e^{\pi}, \sin 1$, dan $2^{\sqrt{2}}$.

BAB 2

KAJIAN LITERATUR

2.1 Pengenalan

Di dalam Bab 1, dinyatakan bahawa terdapat dua jenis nombor tak nisbah iaitu ketidaknisbahan algebra dan ketransendenan. Nombor nyata dapat diklasifikasikan kepada nombor nisbah dan nombor tak nisbah. Menurut Lai dan Danca (2006), pengukuran Lebesgue menyatakan bahawa terdapat lebih banyak nombor tak nisbah berbanding nombor nisbah.

Diketahui bahawa digit-digit bagi nombor nisbah adalah berulang-ulang yang berbentuk digit-digit nombor terhingga. Walau bagaimanapun, digit-digit bagi nombor tak nisbah menunjukkan struktur yang sangat rumit. Lai dan Danca (2006) menyatakan bahawa nombor bagi digit-digit perpuluhan bagi sebarang nombor tak nisbah adalah tidak terhingga.

2.2 Kajian-kajian Terdahulu Tentang Pecahan Berturutan Berlanjar dan Nombor Tak Nisbah

Bahagian ini akan membincangkan tentang beberapa kajian dan penemuan oleh ahli-ahli Matematik berkenaan dengan pecahan berturutan berlanjar dan nombor tak nisbah.

Menurut Burton (2007), kebanyakan penulis bersetuju bahawa teori pecahan berturutan berlanjar bermula dari Rafael Bombelli, ahli algebra Renaissance yang terakhir dan terhebat. Pada dasarnya, Bombelli telah membuktikan bahawa $\sqrt{13}$ dapat ditunjukkan sebagai pecahan berturutan berlanjar seperti berikut :

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}}$$

Wu (2006) mendapati bahawa, untuk setiap nombor tak nisbah, x pengembangan pecahan berturutan berlanjar tak terhingganya adalah dalam bentuk

$$x = a_0(x) + \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + \ldots}}} = [a_0(x); a_1(x), a_2(x), a_3(x), \ldots]$$

dengan $a_0(x) \in Z$ dan $a_i(x) \in N$ untuk setiap $i \geq 1$.

Clemens et al. (1995) telah mengakaji tentang pengembangan pecahan berturutan berlanjar untuk nombor nyata x serta konvegen-konvegenya. Beliau telah menyatakan kajian tersebut seperti di dalam Lema 2.1:

Lemma 2.1 (Clemens *et al.*, 1995) Biar $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ sebagai pengembangan pecahan berturutan berlanjar untuk nombor nyata x, dengan konvegen-konvegennya $\frac{p_n}{q_n} = [a_0;\ a_1,\ a_2, \ldots]$ $n \geq 0$ dan $p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0$, maka

i. $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ dan $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ n \geq 1$

ii. $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n,\ n \geq 0$

iii. $x = \dfrac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}}$, dengan $r_n = [a_n;\ a_{n+1},\ a_{n+2}, \ldots]$

iv. Jika $a_0 = 0$, maka $\dfrac{1}{x} = [a_1;\ a_2,\ a_3, \ldots]$ dan

$$\frac{1}{1-x} = \begin{cases} [1; a_1 - 1, a_2, \ldots] & \text{jika } a_1 \neq 0 \\ [a_2 + 1; a_3, \ldots] & \text{jika } a_1 = 0 \end{cases}$$

v. $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n;\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots,\ a_1]$.

Thakur (1996) menyatakan bahawa untuk nombor transenden, jangkaan untuk mendapatkan pecahan berturutan berlanjar dalam bentuk yang menarik adalah tidak jelas. Dalam kajian ini, beliau telah menyentuh tentang kajian Euler yang telah menjumpai pecahan berturutan berlanjar yang baik untuk e iaitu

$$e = [2;\ 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots].$$

Euler juga telah mengembangkan pecahan berturutan berlanjar bagi e, dan mendapati bahawa untuk $n > 1$ yang genap, diperolehi

$$e^{\frac{1}{n}} = \overline{[1, n-1+2in, 1]}_{i=0}^{\infty} = [1,\ n\text{-}1,\ 1,\ 1,\ 3n\text{-}1,\ 1,\ 1,\ 5n\text{-}1,\ 1, \ldots]$$

dan untuk $n > 1$ yang ganjil, diperolehi

$$e^{\frac{2}{n}} = [1, \overline{\frac{(n-1)}{2} + 3in, 6n + 12in, \frac{(5n-1)}{2+3in}, 1}]_{i-0}^{\infty}$$

Di samping itu, beliau juga telah menyatakan dua contoh pecahan berturutan berlanjar yang rumit dan hanya telah diselesaikan oleh Hurwitz pada tahun 1896. Dua contoh tersebut adalah seperti berikut:

$$2e = [5, 2, \overline{3, 2i, 3, 1, 2i, 1}]_{i=1}^{\infty}$$

dan

$$\frac{e+1}{3} = [1, 4, \overline{5, 4i-3, 1, 1, 36i-16, 1, 1, 4i-2, 1, 1, 36i-4, 1, 1, 4i-1, 1, 5, 4i, 1}]_{i=1}^{\infty}$$

Burton (2007) juga telah melakukan kajian ke atas nombor transenden π. Sebelum itu, dinyatakan beberapa keputusan awal yang digunakan untuk mendapatkan pecahan berturutan berlanjar dan konvegen bagi π.

Teorem 2.2 Setiap nombor tak nisbah mempunyai gambaran yang unik sebagai pecahan berturutan berlanjar tak terhingga.

Korolari 2.1 Jika $\frac{p_n}{q_n}$ adalah penumpuan ke-n kepada nombor tak nisbah x, maka

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n} \leq \frac{1}{q_n^{\ 2}} \qquad n \geq 0 \tag{2.1}$$

Burton (2007) juga mendapati bahawa beberapa konvegen terhasil daripada pecahan berturutan berlanjar bagi nombor

$$\pi = 3.141592653\ldots$$

yang telah ditakrifkan oleh Greek kuno sebagai nisbah lilitan oleh bulatan bahagi diameternya. Melalui pengiraan pecahan berturutan berlanjar daripada Burton (2007), beliau menggunakan kaedah fungsi kurungan, iaitu

$$a_0 = [x_0] \tag{2.2}$$

$$a_1 = [x_1] \tag{2.3}$$

$$a_2 = [x_2] \tag{2.4}$$

$$a_3 = [x_3] \tag{2.5}$$

$$\vdots$$

Oleh itu,

$$x_0 = \pi = 3 + (\pi - 3) \qquad a_0 = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{3.14159265\ldots - 3} = 7.06251330\ldots \qquad a_1 = 7$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{1}{7.06251330\ldots - 7} = 15.99659440\ldots \qquad a_2 = 15$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - [x_2]} = \frac{1}{15.99659440\ldots - 15} = 1.00341723\ldots \qquad a_3 = 1$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{1}{292.00341723\ldots - 292} = 292.63647\ldots \qquad a_4 = 292$$

$$\vdots$$

Nilai bagi a_0, a_1, a_2, ... adalah daripada hasil fungsi kurungan bagi x_0, x_1, x_2, ... dan hanya mengambil nilai sebelum titik perpuluhan sahaja. Oleh itu, pecahan berturutan berlanjar tak terhingga bagi π adalah,

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$$

dan tidak mempunyai corak jujukan a_n yang lengkap. Kajian Burton (2007) juga mendapati, lima konvegen pertama bagi π adalah

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}$$

Di dalam kajian-kajian terdahulu, terdapat kajian tentang penghampiran kepada nombor transenden. Hua (1982) telah mendapatkan penghampiran kepada nombor transenden. Beliau menyatakan bahawa, biar α sebagai nombor nyata. Di kalangan nombor-nombor nyata dengan penyebut-penyebut tidak melebihi *N*, terdapat satu nombor yang menghampiri kepada α dan digelar sebagai penghampiran nisbah terbaik kepada α.

Teorem 2.3 (Hua, 1982) Andaikan bahawa $n \geq 1, 0 < q \leq q_n$ dan $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Maka $\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$.

Daripada hasil kajian yang diperolehi oleh Hua (1982), beliau mendapati bahawa pecahan berturutan berlanjar tak terhingga bagi π adalah

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \cdots]$$

dan konvegen-konvegennya adalah

RUJUKAN

Burton, D.M. 2007. *Elementary Number Theory.* Ed. ke-6. McGraw Hill. Buston Burr Ridge.

Clemens, L.E., Merrill, K.D. & Roeder, W.D. 1995. Continue fraction and series. *Journal of Number Theory* **54**: ms. 309-317.

Hardy, G.H. & Wright, E.M. 1979. *An Introduction to the Theory of Number.* Ed. ke-5. Clarendon Press. Oxford.

Hua, L.K & Shiu, P. (ptjr). 1982. *Introduction to Number Theory* . Berlin Heidelberg, New York.

Lai, D. & Danca, M.F. 2006. Fractal and statistical analysis on digits of irrational numbers. *Chaos Solution and Fractal* **36**: ms. 246-252.

Mollin, R.A. 1998. *Number Theory with Application.* Crc Press. Boca Raton, New York.

Nagell, T. 1964. *Introduction to Number Theory.* Chelsea Publishing Company, New York.

Thakur, D.S. 1996. Exponential and continued fractions. *Journal of Number Theory* **59**: ms. 246-261.

Wu, J. 2006. Continued fraction and decimal expansion of an irrational number. *Advance in Mathematics* **206**: ms. 684-694.