PENGGUNAAN PERSAMAAN TERBITAN LINEAR PERINGKAT KEDUA DAN KAEDAH RUNGE-KUTTA-NYSTROM DALAM MASALAH BANDUL

LIEW VUN KIUN

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH
SARJANA MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS & TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

April 2007

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: Pengguncan Persamaan Terbitan Linear Peringkat Kedua dan Kaedah Runge-Kutta-Nystrom Dalam Masalah Bandul.

Ijazah: Sarjana Muda Sains dengan Kepujian (Matematik Dengan Komputer Grafik)

SESI PENGAJIAN: 6 2004/2005

Saya LIEW VUN KIUN

(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPS/Sarjana/Doktor Falsafah)* ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institusi pengajian tinggi.
4. **Sila tandakan (/)

[ ]	SULIT	(Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)
[✓]	TERHAD	(Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)
[ ]	TIDAK TERHAD	

Disahkan oleh

(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: L04 198, Lorong 10 Taman Megah, Sandakan, Sabah.

Nama Penyelia

Tarikh: 20.4.07

Tarikh:

CATATAN: * Potong yang tidak berkenaan.

** Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa/organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.

@ Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan, atau disertasi bagi pengajian secara kerja kursus dan penyelidikan, atau Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

April 2007

LIEW VUN KIUN
HS 2004-3507

PENGESAHAN

Tandatangan

1. PENYELIA

(Cik Khadizah Ghazali)

2. PEMERIKSA

(Encik Rajasegeran A/L Ramasamy)

3. DEKAN

(SUPT/KS Prof. Madya Dr. Shariff A.K. Omang)

PENGHARGAAN

Sukacitanya dan dengan kesyukuran, disertasi saya berjaya disempurnakan. Di sini saya ingin mengucapkan setinggi-tinggi perhargaan kepada penyelia saya_Cik Khadizah Ghazali. Beliau telah memberi banyak tunjuk ajar yang berguna dan amat bermanfaat dalam penyelidikkan penulisan ilmiah ini.

Tidak lupa juga saya ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada pensyarah-pensyarah yang setia memberi bantuan dan ilmu pengetahuan sepanjang saya menjayakan disertasi dan pengajian saya di Universiti Malaysia Sabah.

Selain itu, perhargaan ini turut ditujukan kepada rakan-rakan seperjuangan, ibu bapa serta keluraga tercinta yang banyak memberi semangat dan dorongan yang sepenuhnya sepanjang usaha penulisan ini. Sumbangan dan jasa daripada kalian tidak akan saya lupa.

Sekian terima kasih.

Liew Vun Kiun
HS2004-3507

ABSTRAK

Kajian ini bertujuan untuk menyelesaikan masalah sistem bandul dengan menggunakan kaedah analitik dan kaedah berangka dan membandingkan kedua-dua kaedah ini. Kaedah yang digunakan pada kaedah analitik ialah kaedah persamaan homogen dengan pekali pemalar manakala kaedah berangka pula ialah kaedah Runge-Kutta-Nystrom tahap-3. Persamaan sistem bandul $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ adalah merupakan bentuk persamaan terbitan kedua yang tak linear. Syarat awal bagi sistem bandul ringkas ialah $\theta(0)=0$, $\theta'(0)=1$ dan $p=1$ akan ditetapkan disepanjang pengiraan. Penyelesaian kaedah persamaan homogen dengan pekali pemalar memberikan persamaan $\theta'(t)=pkos(pt)$. Hasil pengiraan bagi kedua-dua kaedah ialah halaju v atau θ'. Hasil kajian mendapati bahawa penyelesaian meggunakan kaedah persamaan homogen dengan pekali pemalar adalah lebih mudah dan cepat daripada kaedah Runge-Kutta-Nystrom tahap-3. Penggunaan kedua-dua kaedah persamaan homogen dengan pekali pemalar dan kaedah Runge-Kutta-Nystrom tahap-3 adalah dapat menyelesaikan persamaan sistem bandul ringkas.

APPLICATION OF SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION AND RUNGE-KUTTA-NYSTROM IN SIMPLE PENDULUM

ABSTRACT

This research is to solve the system simple pendulum by using analytical method and numerical method and to compare the accuracy of this two method. The homogeneous linear equation with constant coefficients method will be use for analitycal method and for numerical method the Runge-Kutta-Nystrom stage-3 will be use. The equation of simple pendulum system $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ is the nonlinear of second-order differential equation and the initial value for the simple pendulum system will set as $\theta(0)=0$, $\theta'(0)=1$ and $p=1$. After solving the simple pendulum system by homogeneous linear equation with constant coefficients method the equtioan is $\theta'(t)=pkospt$. Calculation of the simple pendulum system equation by the both equation is to find v or θ' . The solution of homogeneous linear equation with constant coefficients method are more easy and fast than Runge-Kutta-Nystrom stage-3 method. The homogemeous linear equation with constant coefficient method and Runge-Kutta-Nystrom stage-3 method are able to solve the system of simple pendulum.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

No. Rajah | Muka Surat

SENARAI SIMBOL

a(x), b(x), c(x)	pemalar
f(x)	fungsi x
y	fungsi y terhadap x
$\frac{dy}{dx}$, y'	terbitan peringkat pertama
$\frac{d^2y}{dx^2}$, y''	terbitan peringkat kedua
l	panjang tali/rod
g	daya graviti
$\frac{ds}{dt}$	pembezaan peringkat pertama jarak s terhadap masa t
$\frac{d\theta}{dt}$	pembezaan peringkat pertama sudut θ terhadap masa t
$\frac{d^2s}{dt^2}$	pembezaan peringkat kedua jarak s terhadap masa t
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	pembezaan peringkat kedua sudut θ terhadap masa t
θ	sudut
mg	daya graviti
$mg\sin\theta$	daya ke atas komponen sudut tegak
$mg\cos\theta$	daya ke atas komponen selari
F	daya ke atas berat objek

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 PENGENALAN

Persamaan terbitan ialah persamaan yang mentakrifkan hubungan diantara fungsi dan satu atau lebih terbitan bagi fungsi tersebut. Persamaan terbitan bukan sahaja berdasarkan kepada kaedah menyelesaikan persamaan terbitan tertentu, tetapi juga berdasarkan bagaimana persamaan terbitan itu wujud dalam kehidupan harian. Terdapat banyak dasar hukum atau peraturan dalam fizik, kimia, biologi dan ekonomi boleh diformulakan dengan menggunakan persamaan terbitan. Jadi, penggunaan persamaan terbitan adalah sangat penting dan berguna dalam matematik, kejuruteraan, fizik malah dalam kehidupan harian.

1.2 PERSAMAAN TERBITAN PERINGKAT KEDUA

Persamaan terbitan peringkat kedua adalah persamaan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui iaitu y, terbitan y'(peringkat pertama) dan y''(peringkat kedua) dan pembolehubah x. Persamaan terbitan peringkat kedua merupakan salah satu penggunaan yang terkandung dalam persamaan terbitan. Bentuk am persamaan terbitan biasa linear peringkat kedua diberi oleh,

$$\left.\begin{array}{l} a(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + b(x)\dfrac{dy}{dx} + c(x)y = f(x) \\ \\ atau \\ \\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

dengan,

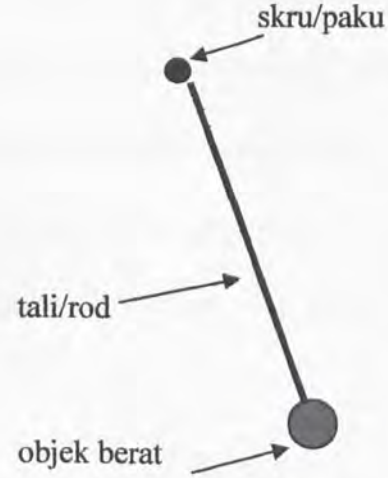
$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$	=	pemalar
$f(x)$	=	fungsi x
y	=	fungsi y terhadap x
$\dfrac{dy}{dx}$, y'	=	terbitan peringkat pertama
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y''	=	terbitan peringkat kedua

Dalam kajian ini, persamaan terbitan linear peringkat kedua akan digunakan untuk menyelesaikan dalam masalah sistem bandul ringkas.

1.3 SISTEM BANDUL

Sistem bandul ialah suatu alat yang mempunyai suatu objek berat yang tergantung pada hujung rod atau suatu jasad tegar, apabila dilepaskan pada suatu kedudukan akan berayun dengan bebas ke bawah dengan suatu daya graviti dan ke atas oleh kerana suatu daya inersia.

Inersia ialah Hukum Newton Pertama iaitu menyatakan bahawa sesuatu objek akan kekal dalam keadaan asalnya, iaitu dalam keadaan pegun atau dalam keadaan halaju seragam jika tiada daya luar bertindak ke atas objek itu. Jadi sistem bandul akan berayun dengan bebas apabila dilepaskan pada suatu kedudukan. Sistem bandul ringkas dimana suatu rod atau tali yang diikat dengan skru dengan suatu objek berat di hujung tali atau rod seperti rajah di bawah;



RAJAH 1.1 Sistem Bandul Ringkas

Di mana $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ ialah persamaan terbitan sistem bandul ringkas diberikan

dengan,

l	=	panjang tali/rod
g	=	daya graviti
$\frac{ds}{dt}$	=	pembezaan peringkat pertama jarak s terhadap masa t
$\frac{d\theta}{dt}$	=	pembezaan peringkat pertama sudut θ terhadap masa t
$\frac{d^2s}{dt^2}$	=	pembezaan peringkat kedua jarak s terhadap masa t
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	=	pembezaan peringkat kedua sudut θ terhadap masa t

1.4 KAEDAH RUNGE-KUTTA-NYSTROM (RKN)

Kaedah Runge-Kutta-Nystrom(RKN) yang akan dibincangkan di sini ialah RKN tahap-3. Parameters RKN tahap-3 perlu memenuhi 3 syarat bagi komponen y dan 5 penyelesaain bagi y'. Terdapat tiga tahap formula yang melibatkan 9 parameter tak bersandar apabila *row sum condition* digunakan dan boleh mencapai 4-tahap ketepatan. Langkah ini lah yang tidak terkandung dalam Runge-Kutta. Rumus RKN tahap-3 diberikan oleh;

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3$$

(1.2)

1.5 SKOP KAJIAN

Sistem bandul boleh merujuk kepada pelbagai aspek, contohnya sistem bandul ringkas, sistem bandul gandaan, sistem bandul *Foucault* , sistem bandul *Spherical*, sistem bandul *Kater's*, sistem bandul *Harmonograph*, and sistem bandul *Metronome*. Walau bagaimanapun, kajian ini hanya melibatkan sistem bandul ringkas sahaja.

Persamaan terbitan pula merupakan suatu bidang matematik yang sangat luas. Antaranya ialah, persamaan peringkat pertama, persamaan peringkat kedua, kaedah siri kuasa dan Jelmaah Laplace. Dalam penyelesaian persamaan peringkat kedua pula mempunyai penyelesaian menggunakan teorem kewujudan dan keunikan, kaedah penurunan peringkat, kaedah ubahan parameter, teori pengoperasi, persamaan homogen, persamaan tak homogen dan kaedah penggantian. Kajian ini hanya tertumpu kepada persamaan terbitan peringkat kedua, di mana menggunakan persamaan terbitan peringkat kedua dengan kaedah penurunan peringkat.

Kaedah Runge-Kutta-Nystrom mempunyai beberapa tahap seperti kaedah Runge-Kutta. Dalam kajian ini, penyelesaian masalah sistem bandul ringkas akan menggunakan kaedah Runge-Kutta-Nystom tahap-3.

1.6 OBJEKTIF KAJIAN

Dalam kajian ini, terdapat dua objektif yang ingin dicapai iaitu;

I. Menyelesaikan masalah sistem bandul ringkas dengan menggunakan persamaan terbitan linear peringkat kedua kaedah persamaan homogen dengan pekali pemalar dan kaedah Runge-Kutta-Nystrom tahap-3.

II. Membandingkan kaedah persamaan homogen dengan pekali pemalar dengan kaedah Runge-Kutta-Nystrom tahap-3 dalam masalah sistem bandul.

BAB 2

ULASAN LITERATUR

2.1 KAJIAN LEPAS SISTEM BANDUL

Dalam kajian Shibata (2004), tujuannya adalah untuk mengkaji ketepatan penyelesaian apabila $\lambda \gg 1$. Dengan menggunakan pendekatan ketaksamaan, keatas persamaan (2.1), (2.2) dan (2.3) kita dapat menunjukkan terdapat dua jenis penyelesaian iaitu, dengan lengkap hampir dalam I dan fungsi langkah dengan dua langkah. Perturbed sistem bandul ringkas, diberi persamaannya ;

$$-u''(t) = \mu f(u(t)) + \lambda \sin u(t), \qquad t \in I := (-T, T), \tag{2.1}$$

$$u(t) > 0, \qquad t \in I, \tag{2.2}$$

$$u(\pm T) = 0, \tag{2.3}$$

Dengan $\lambda > 0$ dan $\mu \in R$ adalah parameter. Persamaan (2.1), (2.2) dan (2.3) akan dikaji dalam kertas kerja ini untuk membuktikan kecekapan apabila $\lambda \gg 1$.

Menurut Schmidt (2000), ingin membuktikan teorem am mengenai kawalan pergerakan sistem mekanikal seperti bandul (ringkas atau gandaan), dari keseimbangan dalam satu kawasan ke keseimbangan dalam kawasan yang berlainan. Dinamik seperti sistem mekanikal adalah mengambarkan melalui persamaan terbitan tak linear dengan kawalan; apa yang cuba dibuktikan ialah keputusan *non-local controllability.* Dengan satu kaedah langsung dan kaedah pada dasarnya yang membina itu boleh memperoleh lebih banyak keputusan yang terperinci dengan mendapat kawalan bandul ringkas yang tergantung menunjukkan pergerakan dari L dalam arah mendatar. Dari teoram, $T_0 > 0,\ \alpha > 0$ dan T memenuhi $0 < T < T_0$ supaya dapat mengawal:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha & \text{jika} \quad 0 \le t < T/2 \\ -\alpha & \text{jika} \quad T/2 \le t \le T \end{cases} \tag{2.4}$$

Keputusannya:

$$T(\alpha) = 2S(\alpha, \tau(\alpha, L)) = \tau(\alpha) + \delta(\alpha, \tau(\alpha))$$

$$\le \sqrt{L/\alpha} + P(\alpha) \le \sqrt{L/\alpha} + C[\alpha^2 + g^2]^{-\frac{1}{4}}$$

Membuktikan bahawa α dengam mencukupi sebesar T(α) boleh dipilih secara arbiter kecil. Ini menyiapkan pembuktian teorem itu.

2.2 KAJIAN LEPAS PERSAMAAN TERBITAN PERINGKAT KEDUA

Nguyen Bich Huy, (2004), kajian beliau mengenai masalah Cauchy peringkat kedua persamaan terbitan pada skala ruang *Banach* dan aplikasi ke persamaan Kirchhoff. Kajian ini terbahagi kepada dua bahagian iaitu hasil daripada kajian lepas dan aplikasi peringkat kedua ke dalam masalah Cauchy dalam skala ruang *Banach.* Dalam skala ruang *Banach*, persamaan masalah *Cauchy* akan dikaji iaitu;

$$u'' = A(Bu(t), u),$$

dimana A ialah dwilinear operator dan B ialah operator yang selanjar. Anggapkan hipotesis $(H_1),(H_2)$ dipenuhi dan $u_{0,}u_1 \in A(\Omega)$. $T' \leq T$ sedemikian dengan masalah Cauchy bagi persamaan Kirchhoff mempunyai penyelesaian $u \in C^2([0,T'], A(\Omega))$.

Kajian daripada Erik Wahlen (2004), Wahlen ingin membuktikan keputusan tak berayun bagi persamaan terbitan peringkat kedua tak linear. Persamaan yang akan dikaji ialah;

$$y''(t) + F(t, y(t)) = 0, \quad t \geq a, \tag{2.5}$$

Dimana $F:[a,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah selanjar dan tak negatif. Penyelesaian bagi persamaan ini dipanggil gerakan ayunan jika secara arbiter lebih daripada kosong dan jika tak berayun maka ia mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian tak berayun. Pembuktian menunjukan keputusan adalah tak berayunan dimana keputusan menunjukan a=0, dengan a ialah pecutan. Selain itu, dalam kajian Wahlen juga mengaplikasikan persamaan positif persamaan terbitan peringkat kedua dalam persamaan *semilinear Schrodinger*. Keputusan persamaan *semilinear Schrodinger* kajian ini hanya untuk membaiki penyelidikan (Constantin, 1994), (Constantin, 2000) dan (Yin, 2004).

Merujuk Semler *et al.* (1996), kaedah berangka dapat menyelesaikan persamaan terbitan tak linear tersirat peringkat kedua. Tiga kaedah khusus akan dipilih iaitu dua daripadanya ialah siri pengembangan: lelaran *Picard* menggunakan siri Chebyshev dan *Incremental Harmonic Balance* (IHB) dan kaedah yang ketiga ialah peringkat keempat (skim *Houbolt's*) dan peringkat kelapan backward finite differential method (FDM). Keputusan menunjukkan bahawa kaedah pertama kaedah *Picard* tidak sesuai untuk menyelesaikan persamaan tersirat yang mempunyai terma inersia tak linear yang besar. Kaedah kedua pula iaitu kaedah IHB menghasilkan penyelesaian berkala yang tepat, bersama dengan ayunan frekuensi dan kestabilan dinamik dalam system tertaksir dengan mudah. Kaedah yang ketiga boleh digunakan untuk mengira sejarah masa bagi masalah nilai awal. Selain daripada itu, juga menyatakan bahawa gabungan IHB dan FDM boleh menjadi alat yang berkuasa untuk menganalisis masalah getaran tak linear daripada persamaan terbitan tersirat dan tak tersirat.

2.3 KAJIAN LEPAS KAEDAH RUNGE-KUTTA-NYSTROM

Murua (1997) menggunakan kaedah RKN aplikasi ke dalam sistem *multi-body*. Dalam kajian ini, beliau membentuk tiga khusus kaedah RKN bagi persamaan terbitan peringkat kedua iaitu dua kaedah untuk peringkat kelima dan satu kaedah untuk peringkat keenam. Selain itu, beliau juga menggunaka tiga jenis contoh *multi-body* untuk membandingkan kaedah RKN dengan kaedah Runge-Kutta tesurat. Ujikaji berangka yang dijalankan oleh Murua telah menunjukkan bahawa kaedah RKN dapat menyatukan persamaan bagi sistem *multi-body* adalah lebih cekap berbanding dengan kaedah Runge-Kutta tak tersirat.

Hans Van de Vyver (2006), beliau mengguna kaedah RKN baru terutamanya dirancang untuk perintegrasian berangka bagi nilai awal berkala dalam kertas kerja ini. Kaedah baru ini boleh menyatupadukan dengan tepat harmonik gerakan ayunan. Dalam ujikaji berangka, berbandingan kaedah baru dengan kaedah RKN *exponentially-fitted* (Van de Vyver) dan kaedah ARKN (Franco) dalam persamaan gerakan ayunan. Keputusan menunjukkan bahawa kaedah baru adalah lebih cekap beranding dengan kaedah ARKN (Franco) dan kaedah RKN *exponentially-fitted* (Van de Vyver).

Raymond *et al.* (2006) membincangkan penggunaan kaedah Runge-Kutta dan kaedah RKN bagi memilih h (saiz langkah) dengan meminimumkan kecekapan penyepaduan lazim. Fungsi kecekapan ini adalah komponen yang penting untuk membuat kaedah pembolehubah saiz langkah. Antara contoh pembolehubah saiz langkah yang diambil ialah model *Lotka-Volterra*, masalah *Kepler*, masalah *Kepler* menggunakan Runge-Kutta Nystrom dan persamaan *Van de Pol*. Keputusan menunjukkan masalah *Kepler* ralatnya menurun dari 41% ke 59% apabila kaedah pembolehubah *step-size* digunakan, bagi model *Lotka-Volterra* pula ralatnya menurun dari 70% ke 96%.

2.4 SEJARAH MENGENAI KAEDAH RUNGE-KUTTA DAN KAEDAH RUNGE-KUTTA-NYSTROM

Menurut Butcher dan Wanner (1996), pada tahun 1985 merupakan tahun yang penting di mana kertas klasik Runge's telah diterbitkan dalam penyelesaian berangka bagi persamaan terbitan. Perkembangan kaedah Runge-Kutta telah dibahagikan kepada teori dan teknik, penghasilan yang cekap dan perisian komputer persamaan terbitan yang boleh dipercayai. Selain itu, kaedah Runge-Kutta juga penting bagi menyelesaikan persamaan terbitan terutamanya dalam masalah nilai awal. Terdapat tiga keluaran penting diantara tahun 1950 hingga 1960, yang pertama adalah dikemukakan oleh S.Gill yamg membincangkan bagaimana pengiraan dalam langkah dapat terancang. Masalah ini akan merujuk kepada kembagan siri Taylor. Tujuan pengiraan langkah ini bukan hanya untuk mengurangkan keperluan ingatan malah hendak mengekalkan ralat serendah yang mungkin. Merson pula mencadangkan lima tahap kaedah, di mana perbandingan diantara kuantiti dalam setiap langkah anggaran yang dikehendaki untuk menyelesaikan masalah. Kaedah Merson masih digunakan sehingga hari ini. Akhir sekali, P.Herinci memberikan idea tentang masalah nilai awal yang besar dengan diselesaikan menggunakan kaedah berangka.

RUJUKAN

Abell, M.L. & Braselton, J.P. 1996. *Modern Differential Equation : Theory, Applications, Technology*. Harcout Brace&Company, United States of America.

Abdullah, A.R. 1990. *Pengiraan Berangka.* Dewan Bahasa dan Pustaka Kementerian Pendidikan Malaysia, Kuala Lumpur.

Attili, B.S., Furati, K. & Syam, M.I. 2006. An efficient implicit Runge-Kutta method for second systems. *Journal of Applied Mathematics and Computation.* **178,** ms. 229-238.

Butcher, J.C. 1996. A history of Runge-Kutta methods. *Journal of Applied Numerical Mathematics* **20**, ms. 247-260.

Butcher, J.C. 2003. *Numerical methods for ordinary differential equations.* John Wiley & Sons, England.

Butcher, J.C. & Wanner, G. 1996. Runge-Kutta methods: some historical notes. *Journal of Applied Numerical Mathematics* **22,** ms. 113-151.

Chapra, S.C. & Canale, R.P. 2006. *Numerical Methods for Engineers.* Ed. Ke-5. McGraw.Hill International Editon, New York.

Davis, P. 1996. *Differential equation Modeling with MatLab.* Prentice-Hall, Inc, Upper Sadde River, New York.

Dormand, J.R. 1996. *Numerical methods for differential equations: A computational approach.* CRC Press, Florida.

Fauseet, Laurene.V. 1999. *Applied numerical analysis using MATLAB.* Prentice Hall, New Jersey.

Holsapple, R., Iyer, R. & Doman, D. 2006. Variable step-size selection methods for implicit integration schemes for ordes. International *Journal of Numerical Analysis and Modeling.* **4** (2), ms. 212-242.

Mohamad, M.N. 1993. *Pengenalan Persamaan Terbitan Biasa.* Dewan Bahasa dan Pustaka Kementerian Pendidikan Malaysia, Kuala Lumpur.

Murua, A. 1997. Runge-Kutta-Nystrom methods for general second order ODEs with application to multi-body system. *Journal of Applied Numerical Mathematics.* **28**, ms. 387-399.

Nguyen, B.H., Nguyen, A.S. & Nguyen, A.T. 2004. A second-order Cauchy problem in a scale of Banach spaces and application to Kirchhoff equations. *Journal of Differential Equations.* **206,** ms. 253-264.

Neumann, E. 2004. *MyPhysicsLab-SimplePendulum (Numerical Solution).* Canadian Mathematics Society. http://www.myphysicslab.com/spring1.html

Semler, C., Gentleman, C.W. & Paidoussis, M.P. 1996. Numerical solutions of second order implicit non-linear ordinary differential equations. *Journal of Sound and Vibration.* **196** (4), ms. 553-574.

Schmidt, G.E.J.P. 2000. On the control of mechanical systems from one equilibrium location to another. *Journal of Differential Equations.* **175,** ms. 189-208.

Shibata, T. 2006. Layer structures for the solutions to the perturbed simple pendulum problems. *Journal of Mathematical Analysis and Application.* **315**, ms. 725-739.

Vyver, H.V.D. 2006. A 5(3) pair of explicit Runge-Kutta-Nystrom methods for oscillatory problems. *Journal of Mathematical and Computing Modelling.*

Wahlen, E. 2004. Positve solution of second-order differential equations. *Journal of Nonlinear Analysis* **58**, ms. 359-366.

Weisstein, E.W. 2006. *Pendulum—from Eric Weisstein's World of Physics. Retrieved,* 20 August 2006, from, *http://scienceworld.wolfram.com/physics/Pendulum.html.*