KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN BERPECUTAN TERUBAHSUAI (MAOR) DALAM MENYELESAIKAN MASALAH USIKAN SINGULAR

MICHELLE HILDALYNE JERING ANTHONY LUTA

PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

2009

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

25 Mac 2009

MICHELLE HILDALYNE JERING ANTHONY LUTA

HS2004-4416

PUMS99:1

UNIVERSITI MALAYSIA SABAH

BORANG PENGESAHAN STATUS TESIS@

JUDUL: KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN BERPECUTAN TERUBAHSUAI (MAOR) DALAM MENYELESAIKAN MASALAH USIKAN SINGULAR

IJAZAH: SARJANA MUDA MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK DENGAN KEPUJIAN

SAYA MICHELLE HILDALYNE JERING ANTHONY LUTA SESI PENGAJIAN: 2004
(HURUF BESAR)

mengaku membenarkan tesis (LPSM/Sarjana/Doktor Falsafah) ini disimpan di Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dengan syarat-syarat kegunaan seperti berikut:-

1. Tesis adalah hakmilik Universiti Malaysia Sabah.
2. Perpustakaan Universiti Malaysia Sabah dibenarkan membuat salinan untuk tujuan pengajian sahaja.
3. Perpustakaan dibenarkan membuat salinan tesis ini sebagai bahan pertukaran antara institutsi pengajian tinggi.
4. Sila tandakan (/)

☐ SULIT (Mengandungi maklumat yang berdarjah keselamatan atau Kepentingan Malaysia seperti yang termaktub di dalam AKTA RAHSIA RASMI 1972)

☐ TERHAD (Mengandungi maklumat TERHAD yang telah ditentukan oleh organisasi/badan di mana penyelidikan dijalankan)

☐ TIDAK TERHAD

Disahkan Oleh

Michelle.
(TANDATANGAN PENULIS)

(TANDATANGAN PUSTAKAWAN)

Alamat Tetap: 7C, LORONG MALUDAN BARAT 2B, JALAN MALUDAN, 96000 SIBU, SARAWAK

PROF. MADYA DR. JUMAT SULAIMAN
Nama Penyelia

Tarikh: 27/4/09

Tarikh: ______

CATATAN:- *Potong yang tidak berkenaan.
**Jika tesis ini SULIT atau TERHAD, sila lampirkan surat daripada pihak berkuasa /organisasi berkenaan dengan menyatakan sekali sebab dan tempoh tesis ini perlu dikelaskan sebagai SULIT dan TERHAD.
@Tesis dimaksudkan sebagai tesis bagi Ijazah Doktor Falsafah dan Sarjana secara penyelidikan atau disertai bagi pengajian secara kerja kursus dan Laporan Projek Sarjana Muda (LPSM).

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

25 Mac 2009

MICHELLE HILDALYNE JERING ANTHONY LUTA

HS2004-4416

PENGESAHAN

DIPERAKUKAN OLEH

Tandatangan

1. **PENYELIA**
   (PROF. MADYA DR. JUMAT SULAIMAN)

2. **PEMERIKSA**
   (ENCIK VICTOR TIONG)

3. **DEKAN**
   (PROF. DR. MOHD. HARUN ABDULLAH)

PENGHARGAAN

Pertama sekali, saya ingin mengucapkan syukur kepada Tuhan kerana dapat menyempurnakan projek tahun akhir ini. Jutaan terima kasih diucapkan terutama sekali kepada Prof. Madya Dr. Jumat Sulaiman yang merupakan penyelia saya yang telah banyak membantu dan mengorbankan masa untuk membimbing saya dalam menyiapkan disertasi ini.

Sekalung penghargaan juga ingin saya berikan kepada para pensyarah lain yang telah banyak memberi tunjuk ajar serta bimbingan sepanjang tempoh pembelajaran saya di sini. Akhir sekali, jutaan terima kasih juga kepada ahli keluarga serta kawan-kawan yang sentiasa memberi sokongan moral dan dorongan untuk saya selama ini.

ABSTRAK

Tujuan kajian ini adalah untuk menyelesaikan permasalahan persamaan usikan singular dengan menggunakan kaedah MAOR serta perbandingan kaedah tersebut dengan kaedah-kaedah lelaran klasik yang lain seperti Gauss-Seidel, SOR dan AOR. Kajian ini dijalankan dengan objektif untuk merumuskan persamaan penghampiran beza terhingga bagi penyelesaian permasalahan usikan singular, membangun dan melaksana kaedah AOR dan MAOR serta kaedah kawalan Gauss-Seidel dan SOR untuk penyelesaian sistem persamaan linear serta menganalisa kaedah-kaedah tersebut dari segi bilangan dan masa lelaran dan ralat mutlak. Dapat disimpulkan bahawa kaedah MAOR adalah kaedah yang terbaik antara keempat-empat kaedah yang dibincangkan kerana memberikan nilai bilangan dan masa lelaran yang paling minimum.

MODIFIED ACCELERATED OVERRELAXATION ITERATIVE METHOD (MAOR) FOR SOLVING THE SINGULAR PERTURBATION PROBLEMS

ABSTRACT

This research is to numerically evaluate singular perturbed equation using the MAOR and AOR methods and also the control methods which are the Gauss-Seidel and SOR. This research is done with the objective of formulating the finite difference approximation for solving the singularly perturbed equations, applying the methods mentioned in order to solve the linear system equations and to analyze the methods by comparing the number and time of iterations and also the absolute error. In conclusion, the MAOR method is the best method among the four methods done in this research in terms of its number and time of iterations, which returned the most minimum values among all four methods.

SENARAI KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

No. Rajah | Muka Surat

SENARAI ISTILAH

Singkatan	Bahasa Inggeris	Bahasa Melayu
AOR	Accelerated Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berpecutan
DAE	Differential Algebraic Equation	Persamaan Terbitan Algebra
DDE	Delayed Differential Equation	Persamaan Terbitan Lengah
GAOR	Generalized Accelerated Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berpecutan Teritlak
MAOR	Modified Accelerated Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berpecutan Terubahsuai
ODE	Ordinary Differential Equation	Persamaan Terbitan Biasa
PDE	Partial Differential Equation	Persamaan Terbitan Separa
PAOR	Preconditioned Accelerated Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berpecutan Berprasyarat

SAOR	Symmetric Accelerated Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berpecutan Bersimetri
SDE	Stochastic Differential Equation	Persamaan Terbitan Stokastik
GSOR	Generalized Successive Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Teritlak
MSOR	Modified Successive Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terubahsuai
SOR	Successive Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut
SSOR	Symmetric Successive Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Bersimetri
USSOR	Unsymmetric Successive Overrelaxation Method	Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Tidak Bersimetri

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 PENGENALAN

Teori usikan boleh didefinisikan sebagai kaedah matematik yang digunakan untuk mencari penyelesaian ramalan kepada sesuatu masalah yang tiada penyelesaian yang tepat, bermula dengan penyelesaian tepat yang didapatkan melalui masalah yang berkait. Suatu penyebut kecil iaitu ε ditambah kepada persamaan matematik bagi masalah berkaitan yang boleh diselesaikan dengan tepat.

Masalah usikan banyak berlaku dalam pelbagai cabang sains dan kejuruteraan seperti dinamik cecair, terutamanya permasalahan pergerakan cecair yang melibatkan nombor Reynolds dan macam-macam lagi permasalahan dalam bidang pergerakan cecair. Bidang ini juga semakin menarik minat para ahli matematik gunaan (Reddy & Reddy, 2002).

1.2 PEMERIHALAN KONSEP MATEMATIK ASAS

Dalam kajian ini, konsep matematik asas yang diperlukan untuk menyelesaikan sistem persamaan usikan singular adalah seperti persamaan terbitan, kamiran, matriks algebra dan siri kembangan Taylor. Siri kembangan Taylor digunakan dalam proses pendiskretan persamaan usikan singular. Penjanaan siri kembangan Taylor tersebut melibatkan pengetahuan dalam konsep persamaan terbitan serta pengamiran. Setelah sistem persamaan linear dijana daripada penghampiran beza terhingga maka sistem persamaan linear tersebut akan ditulis dalam bentuk matriks bagi mempermudahkan perumusan kaedah-kaedah lelaran yang akan digunakan.

1.2.1 Pemerihalan Konsep Persamaan Terbitan

Persamaan terbitan digunakan secara meluas dalam kedua-dua bidang matematik, tulen serta gunaan. Persamaan terbitan melibatkan pembolehubah-pembolehubah bersandar dan tidak bersandar. Hanya pembolehubah-pembolehubah bersandar yang akan diterbitkan. Terdapat empat jenis persamaan terbitan iaitu persamaan terbitan biasa (ODE), persamaan terbitan separa (PDE), persamaan terbitan lengah (DDE), persamaan terbitan stokastik (SDE) dan persamaan terbitan algebra (DAE).

Persamaan terbitan biasa (ODE) ialah persamaan terbitan yang fungsinya melibatkan satu sahaja pembolehubah tidak bersandar (Chapra & Canale, 2006). Persamaan terbitan separa (PDE) ialah persamaan terbitan yang mana fungsi yang tidak diketahui itu adalah fungsi daripada multipembolehubah tidak bersandar dan pembezaan separa bagi multipembolehubah tidak bersandar itu. Persamaan terbitan lengah (DDE) pula ialah persamaan terbitan yang mana pembezaan fungsi yang tidak diketahui pada sesetengah masa diberi dalam bentuk nilai fungsi tersebut pada masa sebelumnya. Persamaan terbitan stokastik (SDE) ialah persamaan terbitan di mana satu atau lebih termanya adalah suatu proses stokastik, dan seterusnya akan menghasilkan penyelesaian yang mana penyelesaian itu sendiri juga adalah proses stokastik. Yang terakhir sekali, persamaan terbitan algebra (DAE) ialah persamaan terbitan yang melibatkan terma-terma terbitan dan algebra, diberi dalam bentuk tersirat. Akan tetapi kajian ini hanya akan melibatkan persamaan terbitan biasa (ODE) dan persaman terbitan separa (PDE).

Setiap kategori persamaan terbitan yang telah dinyatakan boleh diklasifikasikan mengikut peringkat masing-masing. Sebagai contoh, persamaan terbitan peringkat pertama ialah persamaan yang peringkat terbitan tertinggi adalah terbitan pertama. Persamaan ini juga boleh dikatakan sebagai persamaan linear. Manakala terbitan peringkat kedua merupakan persamaan yang peringkat terbitan tertinggi adalah terbitan kedua. Persamaan terbitan yang peringkat terbitan tertingginya lebih tinggi daripada satu dikenali sebagai persamaan tidak linear (Chapra & Canale, 2006).

(A) Pemerihalan Persamaan Terbitan Biasa

Dalam matematik, persamaan terbitan biasa (ODE) adalah suatu hubungan yang mengandungi fungsi bagi hanya satu pembolehubah tidak bersandar serta mempunyai satu atau lebih pembezaan untuk pembolehubah tersebut.

Berikut adalah persamaan am bagi persamaan terbitan biasa (ODE) untuk peringkat n:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = y^{(n)} \tag{1.1}$$

dengan y sebagai fungsi yang tidak diketahui,

$$y : R \to R$$

Manakala bagi fungsi yang bernilai vektor,

$$y : R \to R^m$$

fungsi F di atas dinamakan sistem persamaan terbitan biasa dengan dimensi m.

Apabila suatu persamaan terbitan dengan peringkat n itu berada dalam bentuk

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.2}$$

persamaan ini dinamakan persamaan terbitan tersirat manakala persamaan dalam bentuk persamaan (1.1) dinamakan sebagai persamaan terbitan tak tersirat.

Suatu persamaan terbitan itu adalah linear sekiranya fungsi F boleh ditulis sebagai gabungan linear oleh pembezaan bagi y seperti berikut:

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + r(x) \tag{1.3}$$

dengan $a_i(x)$ dan $r(x)$ adalah fungsi selanjar dalam x. Sesuatu persamaan terbitan linear itu adalah homogenus sekiranya $r(x) = 0$ dan persamaan itu adalah tidak homogenus seandainya $r(x) \neq 0$.

(B) Pemerihalan Persamaan Terbitan Separa

Persamaan terbitan separa (PDE) merupakan suatu hubungan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui dengan beberapa pembolehubah tidak bersandar dan pembezaan separanya adalah terhadap pembolehubah-pembolehubah tersebut.

Berikut adalah persamaan am bagi persamaan terbitan separa mudah:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0. \tag{1.4}$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahawa nilai-nilai $u(x,y)$ adalah tidak bersandar terhadap x. Oleh itu, penyelesaian am bagi persamaan ini ialah

$$u(x,y) = f(y), \tag{1.5}$$

dengan f ialah fungsi terbezakan bagi y. Persamaan terbitan biasa yang sesuai untuk kes ini ialah

$$\frac{du}{dx} = 0 \tag{1.6}$$

yang mempunyai penyelesaian

$$u(x) = c,$$

dengan c ialah nilai pemalar yang tidak bersandar terhadap x. Penyelesaian am bagi persamaan terbitan biasa melibatkan pemalar yang terbezakan manakala penyelesaian bagi persamaan terbitan separa melibatkan fungsi yang terbezakan. Penyelesaian bagi persamaan terbitan separa adalah tidak unik, oleh itu persamaan terbitan separa mempunyai syarat-syarat sempadan dengan penyelesaian tersebut boleh ditakrifkan.

1.2.2 Pemerihalan Matriks Algebra

Matriks merupakan satu tatasusunan bagi elemen-elemen atau unsur-unsur kuantiti yang abstrak. Matriks yang biasa selalunya melibatkan nombor-nombor nyata atau nombor kompleks. Matriks yang melibatkan nombor kompleks dikenali sebagai matriks kompleks. Matriks digunakan untuk membentuk sistem persamaan linear. Oleh itu, matriks boleh ditambah, ditolak, didarab atau dibahagi seperti persamaan matematik biasa.

Suatu matriks yang mempunyai bilangan baris m dan lajur n dipanggil matriks $m \times n$ dan m dan n dikatakan sebagai dimensi bagi matriks tersebut. Dimensi sesuatu matriks itu selalunya dinyatakan bilangan baris terlebih dahulu dan kemudiannya bilangan lajur. Tertib atau saiz sesuatu matriks dinyatakan sebagai $m \times n$. Sekiranya bilangan baris dan lajur adalah sama, maka matriks tersebut dikenali sebagai matriks segiempat sama dan ditakrifkan sebagai matriks $n \times n$ atau matriks tertib n.

Tatasusunan suatu matriks:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Berikut adalah jenis-jenis matriks:

(A) Pemerihalan Matriks Baris dan Lajur

Matriks baris merupakan matriks yang mempunyai satu baris sahaja yang pada peringkat $1 \times n$ manakala matriks lajur yang berperingkat $m \times 1$ merupakan matriks yang mempunyai satu lajur sahaja. Apabila matriks tersebut digunakan untuk mentakrifkan vektor, maka matriks lajur dan matriks baris masing-masing dikenali sebagai vektor lajur dan vektor baris. Unsur-unsur (i,j) bagi vektor baris atau vektor lajur dikenali sebagai komponen vektor. Vektor baris, $\vec{r}$ dan vektor lajur, $\vec{s}$ dinyatakan seperti berikut:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

(B) Pemerihalan Matriks Pepenjuru

Matriks pepenjuru merupakan matriks segiempat sama yang unsur-unsur selain unsure-unsur pepenjuru bernilai sifar. Suatu matriks itu, misalnya matriks $D = \lfloor d_{ij} \rfloor$ merupakan matriks pepenjuru sekiranya $d_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Bentuk matriks pepenjuru D adalah seperti berikut:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

(C) Pemerihalan Matriks Identiti

Matriks identiti pula ialah matriks segi empat sama yang unsur-unsur pepenjurunya bernilai satu dan unsur-unsur lain adalah bernilai sifar. Matriks identiti selalunya diwakili dengan I dan boleh diringkaskan sebagai $I_n = \lfloor e_{ij} \rfloor$. Matriks identiti I boleh ditakrifkan seperti berikut:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(D) Pemerihalan Matriks Segitiga Atas dan Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga merupakan matriks segi empat sama dengan unsur-unsur pepenjurunya adalah bernilai sifar. Matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah adalah berbeza. Matriks segitiga atas mempunyai elemen-elemen pepenjurunya bernilai sifar, $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$. Matriks segitiga bawah pula adalah matriks yang elemen-elemen pepenjurunya adalah sifar, $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$. Matriks segitiga atas, U boleh ditakrifkan seperti di bawah:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah adalah seperti berikut:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ j & k & l & 0 \end{bmatrix}$$

(E) Pemerihalan Matriks Transposisi

Transposisi bagi matriks A peringkat $m \times n$ ialah matriks A^T peringkat $n \times m$ yang dibentuk dengan menukar unsur-unsur baris kepada lajur dan sebaliknya.

(F) Pemerihalan Matriks Simetri

Berikut merupakan keadaan di mana suatu matriks segi empat sama A itu boleh dikatakan simetri:

$$A^T = A$$

A^T merupakan matriks transposisi bagi A. Oleh itu, matriks simetri A adalah seperti berikut:

$$A = QDQ^T$$

dengan Q merupakan matriks ortogon dan D merupakan matriks pepenjuru.

1.2.3 Pemerihalan Kembangan Siri Taylor

Dalam kajian ini juga, kembangan siri Taylor amat penting untuk menyelesaikan suatu permasalahan usikan singular itu dengan menggunakan keluarga kaedah AOR dan kaedah SOR. Dalam matematik, siri Taylor ini merupakan perwakilan bagi sesuatu fungsi sebagai jumlah tidak terhingga yang dikira daripada nilai-nilai terbitannya pada suatu titik. Jika siri tersebut menggunakan terbitan pada titik sifar, maka siri ini dipanggil sebagai siri Maclaurin. Berikut adalah takrifan bagi siri Taylor:

$$u(x+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(h\frac{d}{dx}\right)u(x)$$

$$= u(x) + hu'(x) + \frac{h}{2!}u''(x) + \frac{h}{3!}u'''(x) + L + \frac{h}{n!}u^{n}(x) + L \qquad (1.7)$$

Terbitan pertama adalah seperti berikut:

$$\varepsilon u'(x+h) = \frac{\varepsilon}{h}\left[u(x+h) - u(x)\right] + o(h^{1}) \qquad (1.8)$$

Terbitan kedua:

$$\varepsilon u''(x+h) = \frac{\varepsilon}{h^{2}}\left[u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) + o(h^{2})\right] \qquad (1.9)$$

1.2.4 Pemerihalan Kamiran

Kamiran merupakan konsep teras dalam matematik lanjutan, terutamanya dalam bidang kalkulus dan analisis matematik. Kamiran bagi fungsi f terhadap x dengan julat [a,b] boleh ditakrifkan seperti berikut:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (1.10)$$

Kamiran juga boleh dikatakan sebagai anti terbitan, fungsi F yang mana terbitannya ditakrifkan sebagai fungsi f. Terdapat banyak cara untuk mentakrifkan terbitan dan tidak semua adalah sama. Perbezaannya wujud apabila menghadapi kes-kes berlainan, yang mana sesetengah mungkin tidak dapat dikamirkan di bawah definisi yang lain. Definisi kamiran yang biasa digunakan adalah kamiran Riemann dan kamiran Lebesgue.

RUJUKAN

Aguiar, J. V., & Natesan, S., 2006. An efficient numerical method for singular perturbation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **192,** 132-141.

Canale, R. P., Chapra, S. C., 2006. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International Edition, United States of America.

Cvetkovic, L. & Kostic, V., 2007. A note on the convergence of the AOR method. *Applied Mathematics and Computation.*

Cvetkovic, L. & Rapajic, S., 2005. How to improve MAOR method convergence area for linear complementarity problems. *Applied Mathematics and Computation* **162,** 577-584.

Evans, D. J., & Yousif, W. S., 1986. Explicit group over-relaxation method for solving elliptic partial differential equations. *Mathematics and computer in simulation* **28,** 453-466.

Gao, Z. X. & Huang, T. Z., 2006. Convergence of AOR method. *Applied Mathematics and Computation* **176,** 134-140.

Gerald, C. F. & Wheatly, P. O., 1999. *Applied Numerical Analysis.* 6th Edition. Addison-Wesley Longman, United States of America.

Hadjidimos, A., 2000. Successive overrelaxation (SOR) and related method. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **123**, 177-199.

Hadjidimos, A., 1978. Accelerated overrelaxation method. *Journal of Computational Mathematics* **32**, 149-157.

Hadjidimos, A. Yeyios, A. Symmetric accelerated overrelaxation (SAOR) method, *Math. Comput. Simulation XXIV* (1982) 72-76.

Huang. T. Z. & Liu, F. T. 2003. An error bound for the AOR method. *Computers and Mathematics with Applications* **45**, 1739-1748.

J. A., Murdock, 2004. *Perturbations: Theory and Method,* John Wiley & Sons Inc.

Lee, K. H., & Ong, E. H., 1999. A reduction principle for singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation* **101**, 45-62.

Malley O., R. E., 1974. *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York.

Martins, M. M. & Trigo, M. E. 1994. On the convergence of the interval MAOR method. *Applied Numerical Mathematics* **15**, 439-448.

Ohsaki, I. & Niki, H. 1988. The accelerated SAOR method for large linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **24** (1-2), 277-291.

Ohsaki, Y. I., Ikeuchi, M. & Niki, H, 1985. Non-adaptive and adaptive SAOR-CG algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **12-13**, 635-650.

Reddy, Y. N. & Reddy, K. A., 2002. Numerical integration method for general singularly perturbed two point boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation* **133**, 351-373.

Saad, Y. 1996. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* PWS Publishing Company, United States of America.

Song, Y., 1997a. On the convergence of the MAOR method. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **79** (2), 299-317.

Song, Y. 1997b. On the convergence of the GAOR method. *Linear Algebra and Its Applications* **255**, 199-218.

Song, Y., Wang, L., & Wu, M., 2006. Preconditioned AOR iterative method for linear systems. *Applied Numerical Mathematics* **57**, 672-685.

Song, Y. & Yuan, D., 2003. MAOR methods for linear complementarity problem. *Applied Mathematics and Computation.* **140**, 53-67.

Taylor, P. J., 1969. A generalization of systematic relaxation method for consistently ordered matrices. *Journal of Numerical Mathematics* **13**, 377-395.

Varga, R. S., 1962. *Matrix Iterative Analysis.* Prentice-Hall Englewood Cliff.

Young, D. M., 1970. *Iterative solution of large linear system.* Academic Press, New York.