# SUBKELAS FUNGSI CEMBUNG TERHADAP TITIK SIMETRI KONJUGAT

LAU MEI JUAN

DISERTASI INI DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN
DARIPADA SYARAT MEMPEROLEHI IJAZAH SARJANA
MUDA SAINS DENGAN KEPUJIAN



PROGRAM MATEMATIK DENGAN KOMPUTER GRAFIK
SEKOLAH SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITY MALAYSIA SABAH

2012

## PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang setiap satunya telah dijelaskan sumbernya.

Juan

LAU MEI JUAN

(BS09110279)

19 Jun 2012

**DIPERAKUKAN OLEH**

Tandatangan

1. **PENYELIA**
   (PROF. MADYA DR. AINI JANTENG)

2. **PEMERIKSA**
   (PN. ASDALIFAH BINTI TALIBE)

3. **DEKAN**
   (PROF. MADYA DR. BABA MUSTA)

## PENGHARGAAN

Saya ingin mengucapkan terima kasih kepada penyelia saya, Dr. Aini Janteng yang telah memberi banyak galakan, bantuan serta sokongan supaya saya dapat memahami bidang ini. Selain itu, saya juga ingin mengucapkan terima kasih kepada para pensyarah Matematik dengan Komputer Grafik yang telah mencurahkan ilmu pengetahuan yang bernilai kepada saya dan seterusnya membantu saya menyiapkan disertasi ini dengan jayanya.

Di samping itu, saya juga ingin mengambil kesempatan ini untuk mengucapkan terima kasih kepada ibu bapa dan ahli keluarga saya yang telah memberi sokongan moral kepada saya. Saya juga amat menghargai bantuan daripada rakan-rakan seperjuangan.

# ABSTRAK


Andaikan $U$ kelas yang terdiri daripada fungsi-fungsi yang analisis di dalam cakera unit terbuka $D = \{z: |z| < 1\}$ pada satah kompleks. Seterusnya, andaikan $S$ merupakan subkelas $U$ yang terdiri daripada fungsi $f$ yang univalen dan ternormal. Jika suatu fungsi $f \in S$, maka $f$ mempunyai kembangan siri Maclaurin. Dalam kajian ini, subkelas bagi fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat dilambangkan sebagai $C_{sc}(g)$ telah diperkenalkan dengan mengaplikasikan prinsip subordinasi. Selain itu, subkelas fungsi hampir cembung terhadap titik simetri bertertib $\gamma$, $K_s(\gamma)$ turut diperkenalkan dalam kajian ini. Anggaran pekali bagi kelas $K_s(\gamma)$ telah ditentukan.

## SUBCLASS OF CONVEX FUNCTIONS WITH RESPECT TO SYMMETRIC CONJUGATE POINTS

### ABSTRACT

Let $U$ as a class consisting of functions which are analytic in the open unit disc $D = \{z: |z| < 1\}$ on the complex plane. Then let $S$ be the subclass of $U$ that consisting of univalent functions $f$ and normalized. If a function$f \in S$, then $f$ has a Maclaurin series expansion. In this research, subclass of convex functions with respect to symmetry conjugate points is introduced by using the principle of subordination. Furthermore, the subclass of close to convex function of order $\gamma$ with respect to symmetric points, $K_s(\gamma)$ also introduced in this research. By the way, the coefficient estimates of the subclass $K_s(\gamma)$ are determined.

**KANDUNGAN**

## SENARAI RAJAH

# SENARAI SIMBOL

| | |
|---|---|
| $\bar{z}$ | konjugat $z$ |
| $\in$ | unsur kepada |
| $<$ | lebih kecil daripada |
| $\leq$ | lebih kecil daripada atau sama dengan |
| $>$ | lebih besar daripada |
| $\geq$ | lebih besar daripada atau sama dengan |
| $\infty$ | infiniti |
| $\subset$ | subset |
| $\sum$ | hasil tambah |
| $\prod$ | hasil darab |
| $\rightarrow$ | menghampiri kepada |
| $\lvert\ \rvert$ | modulus |
| $\prec$ | subordinasi |
| $!$ | faktorial |

Menurut Duren (1983), suatu fungsi yang analisis di dalam domain $D$ dikatakan univalen jika ia tidak mengambil nilai yang sama sebanyak dua kali : $f(z_1) \neq f(z_2)$ untuk semua pasangan titik $z_1$ dan $z_2$ . Dengan kata lain, fungsi $f$ adalah pemetaan satu ke satu bagi $D$ keseluruh domain lain.

Kelas S mempunyai 4 subkelas utama iaitu

a) kelas fungsi bakbintang diwakili sebagai $S^*$,

b) kelas fungsi cembung diwakili sebagai $C$,

c) kelas fungsi hampir cembung diwakili sebagai $K$,

d) kelas fungsi kuasi cembung diwakili sebagai $K^*$.

## 1.2 Fungsi Bakbintang

Kelas fungsi bakbintang telah diperkenalkan oleh Alexander pada tahun 1915. Menurut Camelia (2010), definisi bagi fungsi bakbintang adalah seperti berikut:

**Definisi 1.2.1** (Camelia, 2010) Andaikan $f: D \to C$ adalah fungsi analisis dengan $f(0) = 0$. Fungsi $f$ dikatakan bakbintang di dalam $D$ terhadap titik asalan, jika fungsi $f$ adalah univalent di dalam $D$ dan $f(D)$ adalah domain bakbintang terhadap titik asalan, bermakna bagi setiap $z \in D$, tembereng garis di antara titik asalan dengan $f(z)$ terletak di dalam $f(D)$.

Di samping itu, Goodman (1975) juga mentakrifkan domain bakbintang dan fungsi bakbintang seperti berikut.

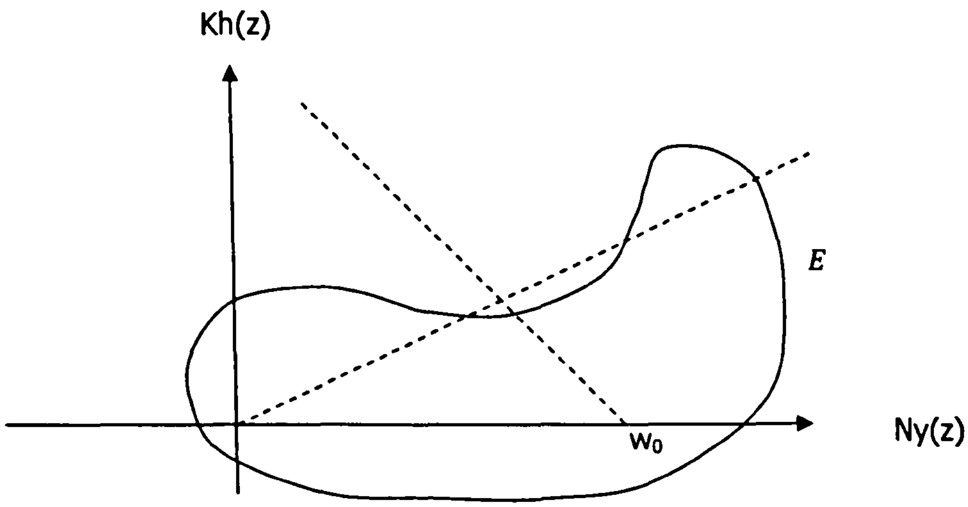
**Definisi 1.2.2** (Goodman, 1975) Suatu set $E$ pada satah kompleks dikatakan bakbintang terhadap $w_0$, iaitu suatu titik pedalaman bagi $E$, jika setiap tembereng garis dengan titik awalan $w_0$ menyilang pedalaman $E$ dalam suatu set iaitu tembereng garis juga. Jika fungsi $f(z)$ memetakan $D$ ke seluruh domain yang bakbintang terhadap $w_0$, maka $f(z)$ dikatakan bakbintang terhadap $w_0$. Dalam kes $w_0 = 0$, $f(z)$ adalah fungsi bakbintang.

**Definisi 1.2.3** (David & Mark, 2010) Suatu domain $D \subset C$ dikatakan bakbintang (terhadap titik asalan) jika bagi setiap titik $w \in D$, garis tembereng yang menyambung titik-titik $w$ dengan 0

$$(0, w] = \{tw;\ t \in (0,1]\}$$

terletak sepenuhnya di dalam $D$.

Domain bakbintang dapat digambarkan melalui perwakilan geometri seperti ditunjukkan di dalam Rajah 1.1




**Rajah 1.1** Domain bakbintang (Sumber: Goodman, 1975)

Dalam Rajah 1.1, didapati domain $E$ adalah bakbintang terhadap titik $w_0$ dan bukan terhadap titik asalan. Ini adalah kerana tembereng garis dengan titik awalan $w_0$ menyilang pedalaman $E$ di dalam suatu set iaitu tembereng garis juga.

Seterusnya, diberikan perwakilan beranalisis bagi fungsi $f \in S^*$ seperti berikut:

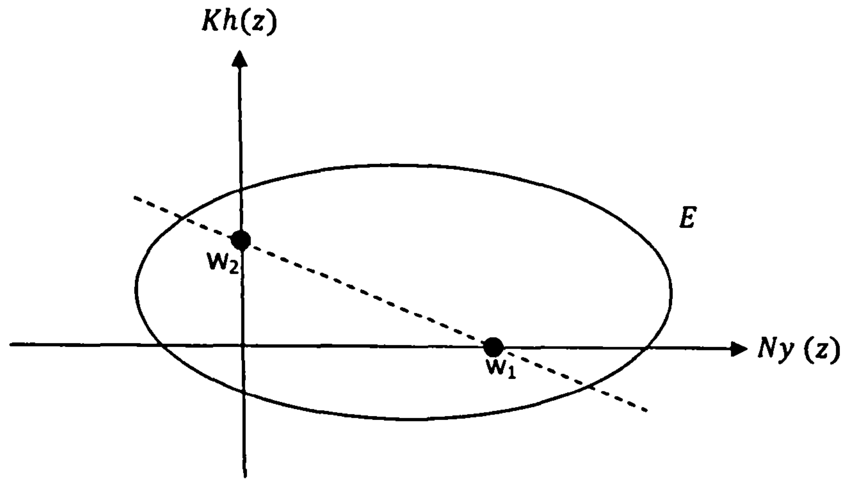
**Definisi 1.2.3** (Goodman, 1975) Andaikan fungsi $f(z)$ adalah analisis di dalam D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Jadi, $f \in S^*$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right\} > 0, \quad z \in D.$$

## 1.3 Fungsi Cembung

**Definisi 1.3.1** (Goodman, 1975) Suatu set $E$ pada satah kompleks dikatakan cembung jika untuk setiap pasangan titik $w_1$ dan $w_2$ di dalam $E$, tembereng garis yang menyambungkan $w_1$ dan $w_2$ juga berada di dalam $E$. Jika fungsi $f(z)$ memetakan $E$ ke seluruh domain yang cembung, maka $f(z)$ dinamakan sebagai fungsi cembung.

Suatu domain cembung dapat digambarkan melalui perwakilan geometrinya seperti yang ditunjukkan di dalam Rajah 1.2.




**Rajah 1.2** Domain cembung (Sumber: Goodman, 1975)

Dalam Rajah 1.2, didapati titik-titik $w_1$ dan $w_2$ berada di dalam set $E$ serta disambungkan oleh satu tembereng garis dengan tembereng garis tersebut juga berada dalam set $E$. Oleh yang demikian, set $E$ dipanggil sebagai domain cembung.

Perwakilan beranalisis bagi fungsi $f \in C$ diberikan oleh definisi berikut:

**Definsi 1.3.2** (Goodman, 1975) Andaikan fungsi $f(z)$ adalah analisis di dalam $D$ dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Jadi, $f \in C$ jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{(z f'(z))'}{f'(z)}\right\} > 0, \quad z \in D.$$

Akhir sekali, bab ini membincangkan tentang prinsip subordinasi. Konsep ini akan digunakan secara terperinci di dalam Bab 3.

## 1.4 Prinsip Subordinasi

Menurut Xu dan Wu pada tahun 2010, prinsip subordinasi dapat diterangkan seperti berikut:

Bagi dua fungsi $f$ dan $g$ yang analisis pada $D$, fungsi $f(z)$ dikatakan bersubordinasi kepada $g(z)$ pada $D$ iaitu $f \prec g$ jika wujud suatu fungsi Schwarz $w(z)$, analisis pada $D$ dengan syarat $w(0) = 0$ dan $|w(z)| < 1$, sedemikian sehingga $f(z) = g(w(z))$ untuk semua $z \in D$.

## 1.5 Objektif Kajian

Objektif yang hendak diperoleh melalui kajian ini adalah:

a) memperkenalkan subkelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat dilambangkan sebagai $C_{sc}(g)$, $g \in C$;

b) menentukan anggaran pekali bagi fungsi $f \in C_{sc}(g)$, $g \in C$;

c) menentukan anggaran pekali bagi fungsi $f \in K_s(\gamma)$.

## 1.6 Skop Kajian

Kajian ini menekankan kepada subkelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat dikembangkan sebagai $C_{sc}(g)$, $g \in C$. Dengan menggunakan idea Xu dan Wu (2010), sifat asas bagi subkelas fungsi tersebut akan ditentukan seperti anggaran pekali. Selain itu, anggaran pekali bagi subkelas fungsi hampir cembung terhadap titik simetri bertertib $\gamma$ juga ditentukan dalam kajian ini disebabkan oleh sifat tersebut adalah sama dengan subkelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat.

# BAB 2

# ULASAN LITERATUR

## 2.1 Pengenalan

Dalam bab ini, kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri, konjugat dan simetri konjugat akan dibincangkan terlebih dahulu. Seterusnya kelas fungsi cembung terhadap titik simetri, konjugat dan simetri konjugat akan dibincangkan selanjutnya. Pada tahun 1959, Sakaguchi telah memperkenalkan kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri. Dengan menggunakan idea Sakaguchi (1959), Das dan Singh telah memperkenalkan kelas fungsi cembung terhadap titik simetri pada tahun 1977.

## 2.2 Fungsi Bakbintang Terhadap Titik Simetri, Konjugat dan Simetri Konjugat

Pada tahun 1959, Sakaguchi telah memperkenalkan kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri. Seterusnya, El-Ashwah dan Thomas telah memperkenalkan dua kelas lain pada tahun 1987 iaitu bakbintang terhadap titik konjugat dan simetri konjugat. Berikut diberikan definisi bagi fungsi bakbintang terhadap titik simetri, konjugat dan simetri konjugat.

**Definisi 2.2.1** (Xu & Wu, 2010) Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan bakbintang terhadap titik simetri di dalam $D$ jika ia memenuhi ketaksamaan berikut:

$$Ny\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right\} > 0 \qquad , z \in D.$$

Kelas tersebut ditandakan sebagai $S_s^*$.

Menurut Selvaraj dan Vasanthi (2011), andaikan $S_c{}^*$ merupakan subkelas bagi $S$ yang terdiri daripada fungsi berbentuk (1.1) dan memenuhi syarat

$$Ny\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)+\overline{f(\bar{z})}}\right\} > 0, \qquad z \in D.$$

Kelas tersebut adalah kelas bakbintang terhadap titik konjugat dan ditandakan sebagai $S_c^*$.

Seterusnya, menurut Chew *et al.,* (2012), takrifan bagi kelas fungsi bakbintang terhadap titik simetri konjugat adalah andaikan $S_c{}^*$ merupakan subkelas bagi $S$ yang terdiri daripada fungsi berbentuk (1.1) dan memenuhi syarat

$$Ny\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)-\overline{f(-\bar{z})}}\right\} > 0, \qquad z \in D.$$

Kelas tersebut adalah kelas bakbintang terhadap titik simetri konjugat dan ditandakan sebagai $S_{sc}{}^*$.

## 2.3 Fungsi Cembung Terhadap Titik Simetri, Konjugat dan Simetri Konjugat

Dengan menggunakan idea Sakaguchi (1959), Das dan Singh telah memperkenalkan fungsi cembung terhadap titik simetri pada tahun 1977.

**Definisi 2.3.1** (Das & Singh, 1977) Andaikan $f(z)$ diberi oleh (1.1) adalah analisis di dalam $D$ dan andaikan bahawa setiap $r \to 1$ $(r < 1)$ dan setiap $\xi$ pada $|z| = r$, ungkapan berikut adalah dipenuhi :

$$Ny\left\{\frac{z\left(zf'(z)\right)'}{zf'(z)+\xi f'(-\xi)}\right\}> 0, \qquad z=\xi,|\xi|=r.$$

Oleh itu, $f(z)$ adalah fungsi cembung terhadap titik simetri dalam $D$ dan kelas fungsi tersebut dilambangkan sebagai $C_s$.

**Teorem 2.3.1** (Das & Singh, 1977) Andaikan $f(z)$ diberi oleh (1.1) adalah analisis di dalam $D$, jadi syarat cukup dan perlu bagi $f(z)$ menjadi univalen dan cembung terhadap titik simetri di dalam $D$ adalah

$$Ny\left\{\frac{\left(zf'(z)\right)'}{\left(f(z)-f(-z)\right)'}\right\}> 0, \quad |z|<1.$$

Seterusnya, fungsi cembung terhadap titik konjugat dan simetri konjugat diberikan oleh definisi berikut:

**Definisi 2.3.2** (Janteng *et al.,* 2006) Andaikan fungsi $f$ adalah analisis di dalam domain $D$ dengan $f(0)=f'(0)-1=0$. Jadi fungsi $f$ adalah cembung terhadap titik konjugat jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{\left(z\,f'(z)\right)'}{(f(z)+\overline{f(\bar{z})})'}\right\}>0, \quad z\in D.$$

Menurut Lim dan Janteng (2011), takrifan bagi kelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat adalah seperti berikut:

**Definisi 2.3.3** Andaikan fungsi $f$ adalah analisis di dalam domain $D$ dengan $f(0)=f'(0)-1=0$. Jadi fungsi $f$ adalah cembung terhadap titik simetri konjugat jika dan hanya jika

$$Ny\left\{\frac{2\left(z\,f'(z)\right)'}{(f(z)-\overline{f(-\bar{z})})'}\right\}>0, \quad z\in D.$$

## 2.4 Subkelas Fungsi Cembung Terhadap Titik Simetri

Janteng dan Abdul Halim (2009) telah memperkenalkan kelas fungsi cembung terhadap titik simetri ditanda sebagai $C_s(A,B)$.

**Definisi 2.4.1** (Janteng & Abdul Halim, 2009) Andaikan fungsi $f$ adalah analisis di dalam $D$ dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Jadi $f \in C_s(A,B)$ jika dan hanya jika

$$\frac{2(zf'(z))'}{(f(z)-f(-z))'} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \quad , \; -1 \leq B < A \leq 1, \quad z \in D.$$

**Teorem 2.4.1** (Janteng & Abdul Halim, 2009) Andaikan $f \in C_s(A,B)$ maka untuk $n \geq 1$,

$$|a_{2n}| \leq \frac{(A-B)}{(2n)n!\,2^n}\prod_{j=1}^{n-1}(A-B+2j)$$

dan

$$|a_{2n+1}| \leq \frac{(A-B)}{(2n+1)n!\,2^n}\prod_{j=1}^{n-1}(A-B+2j).$$

**Teorem 2.4.2** (Janteng & Abdul Halim, 2009) Jika $g \in C_s(A,B)$ jadi $G \in C_s(A,B)$ dengan

$$G(z) = \frac{2}{z}\int_0^z g(t)dt.$$

## 2.5 Subkelas Fungsi Cembung Terhadap Titik Simetri Konjugat

Dengan memperluaskan idea Das dan Singh (1977), kelas $C_{sc}(A,B), -1 \leq B < A \leq 1$ telah diperkenalkan oleh Lim dan Janteng (2011).

**Definisi 2.5.1** (Lim & Janteng, 2011) Andaikan fungsi $f$ adalah analisis di dalam $D$ dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Jadi $f \in C_{sc}(A,B)$ jika dan hanya jika

$$\frac{2(zf'(z))'}{(f(z) - \overline{f(-\bar{z})})'} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} \quad , \ -1 \le B < A \le 1, \quad z \in D.$$

**Teorem 2.5.1** (Lim & Janteng, 2011) Andaikan $f \in C_{sc}(A,B)$ maka untuk $n \ge 1$,

$$|a_{2n}| \le \frac{(A - B)}{(2n)n!\,2^n} \prod_{j=1}^{n-1} (A - B + 2j)$$

dan

$$|a_{2n+1}| \le \frac{(A - B)}{(2n + 1)n!\,2^n} \prod_{j=1}^{n-1} (A - B + 2j).$$

# BAB 3

# ANGGARAN PEKALI BAGI KELAS $C_{sc}(g)$

## 3.1 Pengenalan

Dalam bab ini, subkelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat akan diperkenalkan. Anggaran pekali bagi kelas tersebut akan ditentukan dengan menggunakan definisi dan beberapa lema yang berkaitan.

**Definisi 3.1.1** Andaikan $g: D \to \mathbb{C}$ adalah fungsi cembung sedemikian sehingga $g(0) = 1, g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$, bagi $z \in D$, $Ny(g(z)) > 0$ pada $z \in D$. Andaikan $f$ adalah fungsi analisis dalam $D$ yang diberi oleh persamaan (1.1). Jadi $f \in C_{sc}(g)$ jika dan hanya jika

$$\frac{2(zf'(z))'}{[f(z) - \overline{f(-\bar{z})}]'} \in g(D), \qquad z \in D.$$

## 3.2 Hasil Keputusan Awal

Untuk membuktikan teorem dalam bahagian seterusnya, lema diperlukan.

**Lema 3.2.1** (Xu & Wu, 2010) Andaikan suatu fungsi $g$ diberikan oleh

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k, \qquad z \in D,$$

adalah fungsi cembung di dalam $D$. Andaikan juga fungsi $f(z)$ diberikan oleh

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \qquad z \in D,$$

merupakan fungsi analisis di dalam $D$. Jika $f(z) \prec g(z), z \in D$, maka

$$|a_k| \leq |g_1|, \qquad k \in N,$$

di mana $N$ merupakan set nombor bulat yang positif.

## 3.3 Anggaran Pekali Bagi Kelas $C_{sc}(g)$

Dalam bahagian ini, pekali bagi fungsi $f \in C_{sc}(g)$ akan dianggarkan. Teorem 3.3.1 merupakan hasil anggaran pekali yang diperoleh bagi fungsi $f \in C_{sc}(g)$ dan akan dibuktikan sama ada teorem tersebut benar bagi anggaran pekali bagi kelas fungsi cembung terhadap titik simetri konjugat .

**Teorem 3.3.1** Andaikan fungsi $f \in C_{sc}(g)$, jadi bagi $n \geq 1$,

$$|a_{2n+1}| \leq \frac{|g'(0)|}{(2n+1)n!\,2^n} \prod_{j=1}^{n-1} (|g'(0)| + 2j). \tag{3.1}$$

dan

$$|a_{2n}| \leq \frac{|g'(0)|}{(2n)n!\,2^n} \prod_{j=1}^{n-1} (|g'(0)| + 2j). \tag{3.2}$$

Bukti. Andaikan

$$p(z) = \frac{2\big(zf'(z)\big)'}{\big(f(z) - \overline{f(-\bar{z})}\big)'} \tag{3.3}$$

Daripada persamaan (3.3), didapati

$$2\big(zf'(z)\big)' = p(z) \cdot (f(z) - \overline{f(-\bar{z})})'$$
$$2(1 + 4a_2 z + 9a_3 z^2 + 16a_4 z^3 + 25a_5 z^4 + \cdots + (2n)^2 a_{2n} z^{2n-1} + (2n+1)^2 a_{2n+1} z^{2n})$$
$$= (1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots + p_{2n-1} z^{2n-1} + p_{2n} z^{2n} + p_{2n+1} z^{2n+1})$$
$$\cdot 2(1 + 3a_3 z^2 + 5a_5 z^4 + \cdots + (2n-1)a_{2n-1} z^{2n-2} + (2n+1)a_{2n+1} z^{2n})$$

Dengan membandingkan pekali bagi $z$, didapati

$$4a_2 = p_1 \tag{3.4}$$
$$3(2)a_3 = p_2 \tag{3.5}$$
$$16a_4 = p_3 + 3p_1 a_3 \tag{3.6}$$
$$20a_5 = p_4 + 3p_2 a_3 \tag{3.7}$$
$$(2n)^2 a_{2n} = p_{2n-1} + 3a_3 p_{2n-3} + 5a_5 p_{2n-5} + \cdots + (2n-1)a_{2n-1} p_1 \tag{3.8}$$
$$(2n+1)(2n)(a_{2n+1}) = p_{2n} + 3a_3 p_{2n-2} + 5a_5 p_{2n-4} + \cdots + (2n-1)a_{2n-1} p_2 \tag{3.9}$$

Seterusnya, dengan menggunakan Lema 3.2.1,

$$|a_2| \le \frac{|g'(0)|}{2(2)} \tag{3.10}$$
$$|a_3| \le \frac{|g'(0)|}{3(2)} \tag{3.11}$$
$$|a_4| \le \frac{(|g'(0)|)(2 + |g'(0)|)}{4(4)(2)} \tag{3.12}$$
$$|a_5| \le \frac{(|g'(0)|)(2 + |g'(0)|)}{5(4)(2)} \tag{3.13}$$

Oleh itu, ketaksamaan (3.1) adalah benar untuk $n = 1, 2$. Pembuktian yang dilakukan adalah menggunakan kaedah induksi matematik. Daripada persamaan (3.9) dan dengan menggunakan (3.1) diperoleh

$$
\begin{aligned}
(2n+1)(2n)a_{2n+1} &= p_{2n} + 3a_3p_{2n-2} + 5a_5p_{2n-4} + \cdots + (2n-1)a_{2n-1}p_2 \\
&\leq |p_{2n}| + 3|a_3||p_{2n-2}| + 5|a_5||p_{2n-4}| + \cdots + (2n-1)|a_{2n-1}||p_2| \\
&\leq |g'(0)| + 3|a_3||g'(0)| + 5|a_5||g'(0)| + \cdots + (2n-1)|a_{2n-1}||g'(0)| \\
&= |g'(0)|[1 + 3|a_3| + 5|a_5| + \cdots + (2n-1)|a_{2n-1}|]
\end{aligned}
$$

Maka, persamaan (3.14) telah diperolehi

$$
|a_{2n+1}| \leq \frac{|g'(0)|}{(2n+1)(2n)}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)|a_{2k+1}|\right) \tag{3.14}
$$

Andaikan bahawa ketaksamaan (3.1) dipenuhi bagi $k = 3,4,\dots,(n-1)$ . Kemudian, daripada persamaan (3.14), ketaksamaan berikut diperoleh:

$$
|a_{2n+1}| \leq \frac{|g'(0)|}{(2n)(2n+1)}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{|g'(0)|}{k!\,2^k}\prod_{j=1}^{k-1}(|g'(0)| + 2j)\right) \tag{3.15}
$$

Untuk membuktikan teorem tersebut perlu ditunjukkan bahawa

$$
\begin{aligned}
&\frac{|g'(0)|}{(2m)(2m+1)}\left(1 + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{|g'(0)|}{k!\,2^k}\prod_{j=1}^{k-1}(|g'(0)| + 2j)\right) \\
&= \frac{|g'(0)|}{(2m+1)m!\,2^m}\prod_{j=1}^{m-1}(|g'(0)|+2j)
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

untuk $m = 3,4,\dots,n$

Jika m=3, didapati bahawa bahagian sebelah kanan dan sebelah kiri bagi persamaan (3.16) adalah sama.

Jadi, bahagian sebelah kiri bagi persamaan (3.16) jika m=3 adalah seperti berikut:

$$
\frac{|g'(0)|}{(2m)(2m+1)}\left(1 + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{|g'(0)|}{k!\,2^k}\prod_{j=1}^{k-1}(|g'(0)| + 2j)\right)
$$

# RUJUKAN


Camelia, M.B. 2010. *Univalent functions of one and several complex variable.* Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca Faculty of Mathematics and Computer Science.

Chew, L.W., Janteng, A. & Abdul Halim, S. 2012. Quasi-convex functions with respect to symmetric conjugate points. *International Journal of Algebra,* **6**(3): 117-122.

Das, R.N. & Singh, P. 1977. On subclasses of schlicht function mapping. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,* **8**: 864-872.

David, S. & Mark, E. 2010. *Linearization Models for Complex Dynamical Systems.* Volume 208. Springer Basel AG, Switzerland.

Duren, P. L. 1983. *Univalent Functions.* Springer-Verlag, New York.

El-Ashwah, R.M. & Thomas, D.K. 1987. Some classes of close-to-convex functions. *J. Ramanujan Math. Soc,* **2**: 86-100.

Goodman, A.W. 1975. *Univalent Functions.* Volume I. Mariner Publishing Company, Inc, Tampa, Florida.

Janteng, A., Darus, M. & Abdul Halim, S. 2006. Functions close-to-convex and quasi convex with respect to other points. *International Journal of Pure and Applied Mathematics Forum,* **30**(2): 225-236.

Janteng, A. & Abdul Halim, S. 2009. A sunclass of quasi-convex function with respect to symmetric points. *Applied Mathematical Sciences,* **3**(12): 551-556.

Lim, C.S. & Janteng, A. 2011. Some properties for subclass of convex functions with respect to symmetric conjugate points. *Int. Journal of Math,* **5**(41): 2029-2034.

Ravichandran, V. 2004. Starlike and convex functions with respect to conjugate points. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis,* **20**: 31-37.

Sakaguchi, K. 1959. On a certain univalent mapping. *Journal of the Mathematical Society of Japan,* **11**(1): 72-75

Şeker, B. 2011. On certain new subclass of close-to-convex functions. *Applied Mathematics and Computation,* **218**: 1041-1045.

Selvaraj, C. & Vasanthi, N. 2011. Subclasses of analytic functions with respect to symmetri and conjugate points. *Tamkang Journal of Mathematics,* **42**(1): 87-94.

Xu, Q.H., Srivastava, H.M. & Li, Z. 2011. A certain subclass of analytic and close-to-convex functions. *Applied Mathematics Letter,* **24**: 396-401.

Xu, Q.H. & Wu, G.P. 2010. Coefficient estimate for a subclass of univalent functions with respect to symmetric points. *European Journal of Pure and Applied Mathematics,* **3**(6): 1055-1061.